التحليل الرياضي

التوابع ذات متغير واحد

الجزء الثاني

2

تأليف :

ج . شيلوف

تعريب

أبو بكر خالد سعد الله

ديوان المطبوعات الجامعية

الجزائر

1983

تمهيد

يعتمد القسم الثالث من كتاب « التوابع ذات متغيّر واحد » على نفس المباديء التي انطلق منها القسمان اللذان سبق نشرهما وقد عبرنا على هذه المباديء في مقدمة الجزء الاول. ان ترقيم فصول هذا القسم (من 12 الى 16) يتلو ترقيم الجزء الاول (من 1 الى 11).

يلعب الفصل 12 « البنيات الاساسية للتحليل » الدور الرئيسي في هذا القسم الثالث. فقد اعتبرنا في هذا الفصل الفضاءات الشعاعية والفضاءات المترية (خلافا لما ورد في الفصل 3 من القسم الاول، فإننا اتخذنا هنا فضاءات تابعية بدل مجموعات نقاط من فضاء ذي بعد منته)، والفضاءات النظمية والجبور التنظيمية واخيرا الفضاءات الهيلبرتية. طبقت الجبور التنظيمية على نظرية المؤثرات الخطية في فضاء نظيمي؛ وبصفة خاصة فإن « الحساب المؤثري » للتوابع التحليلية في جبر نظيمي المطبق على جبر المؤثرات الخطية يؤدي الى نظريات من نمط متناوبة فريدولم. كما ان دراسة الفضاء الشعاعي النظيمي المؤلف من المتتاليات المحدودة وفضاء التابعيات على الفضاء السالف الذكر مرتبطة بمفهومي النهاية المعممة والجمع المعمم للسلاسل.

قدمنا في الفصل 13 « المعادلات التفاضلية » النظريات الرئيسية الخاصة بحلول المعادلات التفاضلية المعتادة من اجل التوابع ذات القيم المنتمية الى فضاء نظيمي. إن حل معادلة خطية ذات معامل مؤثري ثابت يكتب على شكل تابع اسي لمؤثر؛ عندما نكتب صراحة هذا التابع نحصل على دساتير تعطى حلول معادلة خطية ذات معاملات ثابتة او جملة معادلات من هذا النمط او معادلة من رتبة عالية. انشأنا فيما يخص المعادلات الخطية ذات

المعاملات المؤثرية المتغيرة طريقة تغيير (او تغيّر) الثابت اما الفصل 14 «النشور المتعامدة» فيهتم اساسا بسلاسل فوري، كما يعتبر انماطا مختلفة لتقارب وقابلية الجمع لهذه السلاسل.

يتناول الفصل 15 «تحويل فوري» الى جانب النظرية الحقيقية المعتادة، مسائل مرتبطة بالساحة العقدية وبصفة خاصة تحويل لابلاس.

نعرض في الفصل 16 «المنحنيات الايسرية» نظرية الانحناء في فضاء متعدد الابعاد.

هذا وتوجد عقب كل عرض (فصل) سلسلة تمارين كما هو الحال في القسمين الاول والثاني، علما اننا نجد اجوبة واشارات الى حلول هذه التمارين في نهاية الكتاب.

المؤلف

هكذا، وبهذه التعديلات التي لابد منها، يمكننا ان ندرك اكثر الحياة الداخلية للرياضيات وما يشكل، في آن واحد، وحدتها وتنوعها مثل ذلك مثل حي كبير تبعثرت وتكاثرت ضواحيه بشكل فوضوي على الساحة المحيطة به، في حين ان المركز يعاد بناؤه بصفة دورية، ويتم هذا البناء في كل مرة وفق مخطط اكثر وضوحا وجمالا ووفق ترتيب اكثر عظمة ومهابة فيهدم الاحياء العتيقة بازقتها الضيقة المضلة ليفتح شوارع تتزايد استقامة وعرضا وجودة تؤدي الى تلك الضواحي.

ن. بورباكي «معمارية الرياضيات»
Bourbaki (1938)

القسم الثالث

فصول مختارة من التحليل الحديث

الفصل 12
البنيات الاساسية للتحليل

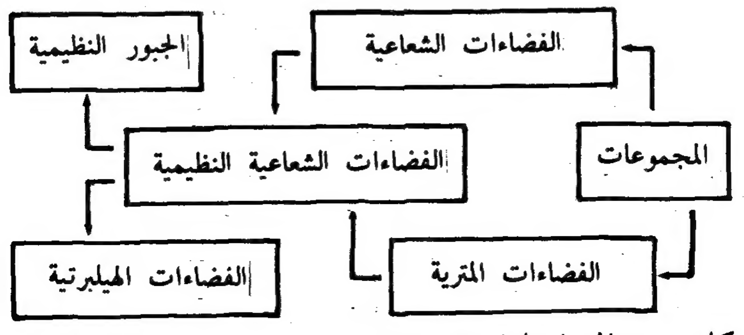
هيلبرت. هو هذا اذن؛ انا اذكره
بطبيعة الحال، كان تلميـذي ايـامهـا.
اصبح بعد ذلك شاعرا: بالطبع، لم يكن
لـه مـن الاوهـام والخيـال مـا يكفـي
للإنشغال بالرياضيات.

تكلمنا قبل الآن في البنيات الرياضية (§ 5.2). لنتكلم عنها مرة ثانية بايجاز قاصدين وراء ذلك البنيات التي تظهر في التحليل. إن عناصر التحليل الرياضي هي الاعداد والتوابع والعمليات على هذه الاعداد والتوابع من وجهة النظر الاكثر عمومية فإن الروابط الموجودة بين تلك العناصر يأتي وصفها في نظرية المجموعات، إذ ان الأعداد والتوابع تشكل مجموعات متنوعة إن علاقات الاحتواء وعمليات الاتحاد والتقاطع والإنتقال الى المتمم تسمح كلها بوصف بعض الخواص العامة لهذه المجموعات. إننا نصل الى بنيات اساسية للتحليل بفرض على هذه المجموعات، شروط اضافية تكتب في شكل جلة من المسلمات تتماشى مع بعض الخاصيات او العمليات المستعملة في التحليل الرياضي القديم (الكلاسيكي). وهكذا ظهرت البنيات الرياضية التالية:

الفضاء الشعاعي حيث نضع العمليتين الخطيتين وهما جمع العناصر وضرب عنصر في عدد على شكل مسلمات؛ الفضاء المتري حيث نضع بواسطة مفهوم المسافة عملية الإنتقال الى النهاية على شكل مسلمات؛ الفضاء الشعاعي النظيمي (« لبـانـاخ Banach ») حيـث نعتبر العمليتين الخطيتين وكـذا الإنتقـال الى النهاية، الجبر النظيمي حيث نضيف الى العمليتين المذكورتين عملية ضرب العناصر فيا بينها؛ الفضاء الهيلبرتي حيث نضع مفهوم الجداء السلمي في شكل

مسلمات وهو الامر الذي يسمح ليس بالعمل باطوال الاشعة فحسب بل ايضا بالزوايا التي تشكلها هذه الاشعة؛ اخيراً عندما نريد ان يكون عدد الابعاد منتهياً فإننا نصل الى الفضاءات الشعاعية التآلفية (أي بدون مسافة)، والتنظيمية والهيلبرتية (او الاقليدية) ذات الابعاد المنتهية توجد الى جانب البنيات الاساسية المذكورة كمية من البنيات الوسيطية التي نغض عنها الطرف الآن رغم اهميتها البالغة (الفضاءات الطوبولوجية، الفضاءات المرتبة جزئياً، الخ).

هاهي تشكلة البنيات الاساسية التي سنقوم بدراستها بالتفصيل



يرمز كل سهم الى استلزام اي انتقال من مفهوم عام الى مفهوم خاص.

§ 1. 12 . الفضاءات الشعاعية(*)

11. 12 ننشيء جلة مسلمات الفضاء الشعاعي انطلاقا من خاصيات الفضاء الحقيقي ذي n بعداً R_n (16. 2) لكن بدون الاخذ بعين الاعتبار الرمز الذي يستعمل الاحداثيات وبتعويض حقل الاعداد الحقيقية R بحقل كيفي K (22. 1). على وجه التحديد فإن فضاء شعاعياKعلى الحقلKهو تعريفاً لمجموعة اشياء $x, y, \dots$ تسمى اشعة عرفنا عليها عملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد (اعداذ الحقل K) بحيث تتحقق المسلمات التالية:

أ . $x + y = y + x$ مهما كان x و y فيK .

ب. $(x + y) + z = x + (y + z)$ مهما كان x ، y ، z في K .

ج. يوجد في K شعاع نرمز له بِ O (الشعاع المنعدم) بحيث $x + 0 = x$ مهما كان $x \in K$.

د. من اجل كل $x \ni K$ يوجد عنصر $y \in K$ يسمى نظير x بحيث $x + y = 0$

ر. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ مهما كان x ، y في K و α في K

س $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ مهما كان $x \in K$ و α ، β في K

ص. $1 \cdot x = x$ مهما كان $x \ni K$.

ط. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$ مهما كان $x \ni K$ وَ α ، β في K

إذا كان الحقل K هو حقل الاعداد الحقيقية R يسمى الفضاء K فضاء شعاعيا حقيقياً ونرمز له هنا بـ R . إذا كان الحقل K هو حقل الاعداد العقدية C يسمى الفضاء K فضاء شعاعيا عقديا ونرمز له بـ C .

12 .21 . إن مسلمات الجمع أ ـ د تكرار لِـ 1 .12 الخاصة بالاعداد الحقيقية. ولذا فإن النتائج المستخلصة في § 1 .3 من مسلمات جمع الاعداد الحقيقية قائمة في كل فضاء شعاعي: وحدانية الصفر، وحدانية النظير من اجل كل $x \ni K$ ، وجود ووحدانية حل المعادلة $a + x = b$، وهو ما يضمن امكانية اعطاء تعريف سليم لعملية الطرح إن عملية ضرب عناصر فضاء شعاعي فيما بينها غير معرفة وعليه فإن تشابه المسلمات د ـ ط مع بعض مسلمات ضرب الاعداد الحقيقية الواردة ضمن 1 .22 تشابه مضل. ذلك هو السبب الذي يجعل بعض النظريات فقط من تلك التي وردت في § 1 .4 صالحة في حالة الفضاءات الشعاعية. القضايا التي تبقي قائمة، بدون تغيير يذكر في البرهان، هي التالية:

أ. (القضية المماثلة لِـ 1 .74 ـ أ). لدينا من اجل كل $x \ni K$ المساواة $0 \cdot x = 0$ (يرمز 0 هنا للشعاع المنعدم في الطرف الايمن وللعدد 0 من الحقل

(*)لمزيد من التفاصيل راجع [14].

K في الطرف الايسر).

ب. (القضية المماثلة لـ 74.1 ـ ب). إذا كان $\alpha x = 0$ فإن لدينا $\alpha = 0$ أو $x = 0$.

ذلك أنه إذا كان $\alpha \neq 0$ فإن لدينا حسب 11.12، ص ـ ط:

$$x = \frac{1}{\alpha}\alpha x = \frac{1}{\alpha}\cdot 0 = 0$$

جـ. (القضية المماثلة لـ 94.1). لدينا من اجل كل $x \in K$ المساواة
$-x = (-1)\,x$

31.12. امثلة في الفضاءات الشعاعية. نشير الى اربعة انواع من الفضاءات على حقل الاعداد الحقيقية R:

أ. الاعداد الحقيقية ذاتها مزودة بالعمليتين المعتادتين.

ب. الفضاء الحقيقي R_n ذي البعد n (§ 6.2)

جـ. الفضاء $R(E)$ المؤلف من كل التوابع (ذات القيم الحقيقية) المعرفة على مجموعة E مزوداً بالعمليتين المعتادتين (الخاصتين بالتوابع العددية) الجمع والضرب في الاعداد الحقيقية (13.4 ـ ب).

د. الفضاء $R(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم الشعاعية (من فضاء حقيقي R) مزوداً بعملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد الحقيقية المعرفتين بطريقة طبيعية على التوابع ذات القيم الشعاعية.

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

إن كل مثال من الامثلة هذه تعميم لسابقة باستثناء المثال الاول. بتعويض حقل الاعداد الحقيقية في الامثلة السابقة بحقل كيفي $\bar{K}$ نحصل على اربعة امثلة من الفضاءات على الحقل K.

د. الحقل K ذاته.

س. الفضاء ذو البعد n: K_n على الحقل K، المؤلف من كل العناصر ذات الشكل $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ المكوّن كل واحد منها من n عنصرا من الحقل

K نزود هذا الفضاء بعملية الجمع وعملية الضرب في الاعداد المعرفتين بالقاعدتين التاليتين:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\beta (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta\alpha_1, \ldots, \beta\alpha_n)$$

ص. الفضاء $K(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم المنتمية الى الحقل K والمعرفة على المجموعة E ، نزود $K(E)$ بالعمليتين المعتادتين (للتوابع) الجمع والضرب في عدد.

ط. الفضاء $\mathrm{K}(E)$ المؤلف من كل التوابع ذات القيم الشعاعية (لفضاء K) والمعرفة على المجموعة E ، نزود $\mathrm{K}(E)$ بالعمليتين الطبيعيتين (للتوابع الشعاعية) الجمع والضرب في عدد.

لم يرد الفضاء الموالى في القائمة اعلاه لكنه ذو اهمية بالغة في التحليل:

ع. الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل التوابع الحقيقية المستمرة المعرفة على فضاء متري M (*)

لا يمكن تعميم هذا المثال الى حالة التوابع ذات القيم المنتمية الى حقل كيفي K لأن مفهوم الاستمرار لهذه التوابع غير معرف عموما (يتطلب استمرار تابع مسافة في الفضاء الذي يأخذ فيه هذا التابع قيمه؛ في حين اننا لم ندخل أية مسافة في حقل كيفي K).

إننا لا نستطيع الآن تعميم المثال ع الاّ الى الحالة التي تكون فيها التوابع ذات قيم في الفضاء الحقيقي ذي البعد n : R_n حيث لدينا في آن واحد العمليتان الخطيتان ومفهوم الاستمرار (18.5):

ف. الفضاء $R_n^s(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة المعرفة على فضاء متري M، ذات القيم في الفضاء الحقيقي R_n ذي البعد n .

ق. هناك حالة خاصة من المثال ف تجدر الاشارة اليها وهي الفضاء $C^s(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة على فضاء متري M ذات القيم العقدية.

سنعتبر اقتصاداً مفيداً للمثال ع ضمن 32 ـ ب.

12 .41 . أ نقول عن الاشعة $x_1, \ldots, x_n$ من فضاء شعاعي K إنها غير مستقلة خطيا أو مرتبطة خطيا إذا وجدت في الحقل K ثوابت $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ تحقق:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \qquad (1)$$

دون ان تكون كلها منعدمة. اما إذا استلزمت المساواة (1): $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ فإننا نقول عن الاشعة $x_1, \ldots, x_n$ إنها مستقلة خطيا

ب. نقول إن فضاء شعاعيا ذو ابعاد n (أو ذو بعد n) إذا وجد n شعاعا مستقلة خطيا وكان كل $n + 1$ شعاعا غير مستقلة خطياً اذا وجد n شعاعاً مستقلة خطيا في فضاء K مهما كان $n = 1, 2, \ldots$ فإننا نقول إن الفضاء K ذو بعد غير منته

ج. تسمى في فضاء ذي n بعدا K كل مجموعة n شعاعا مستقلة خطيا اساس K. إذا كان $f_1, \ldots, f_n$ اساسا وَ x شعاعا كيفيا من الفضاء K فإن الاشعة $x, f_1, \ldots, f_n$ هي حتما غير مستقلة خطيا وتوجد بالتالي ثوابت $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ من K منها غير المنعدم تحقق:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$$

زيادة على ذلك فإن $\alpha_0 \neq 0$ ولولاه لكانت الاشعة $f_1, \ldots, f_n$ غير مستقلة خطيا. إذا قسمنا على α_0 ووضعنا $\beta_j = -\alpha_j/\alpha_0$ (حيث $j = 1, \ldots, n$ نحصل على تفكيك (او تحليل) للشعاع x وفق الاساس $f_1, \ldots, f_n$:

$$x = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n$$

نلاحظ ان هذا التفكك وحيد (ولولاه لكانت الاشعة $f_1, \ldots, f_n$ غير مستقلة خطياً).

د. إن الفضاء ذا البعد n R_n (16. 2) فضاء شعاعي بعده n بمفهوم التعريف السابق. بصفة خاصة فإن الاشعة:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

مستقلة خطيا بطبيعة الحال. في حين ان كل $n+1$ شعاعا.

$$y_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n+1} = (x_1^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)})$$

اشعة غير مستقلة خطيا، وهو ما رايناه ضمن 46.2 كما ان الفضاء K_n (31.12 س) ذو n بعداً بمفهوم التعريف السابق.

ر. لتكن Ω مجموعة غير منتهية على المستقيم العددي: $-\infty<x<\infty$. نرمز بـ $P(\Omega)$ للفضاء الشعاعي المؤلف من كل كثيرات الحدود:

$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (من كل الدرجات) المعرفة على Ω. وذات معاملات منتمية الى حقل كيفي K نزود هذا الفضاء بالعمليتين المعتادتين. إن الفضاء $P(\Omega)$ فضاء شعاعي على الحقل K. لنثبت ان التوابع $1, x, \ldots, x^n$ مستقلة خطياً مهما كان n نفرض ان لدينا المساواة التالية على Ω:

$$\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_nx^n \equiv 0$$

نعوض على التوالي بالقيم (المختلفة) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (من Ω) فنحصل على جملة معادلات بالنسبة لـ $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0+\alpha_1x_0+\ldots+\alpha_nx_0^n=0, \\ \alpha_0+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_1^n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0+\alpha_1x_n+\ldots+\alpha_nx_n^n=0 \end{array}\right\}$$

التي لها معين غير منعدم (معين فاند موند Vandermonde). ومنه:

$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ وهو المطلوب.

يتبن من التعريف المعطى في ب ان الفضاء $P(\Omega)$ ذو بعد غير منته

س. لنثبت ان الفضاء $R^s(M)$ $(C^s(M))$ المؤلف من كل التوابع الحقيقية (العقدية) المستمرة على فضاء متري غير منته M ذو بعد غير منته.

نبحث من اجل كل $n = 1, 2, \ldots$ عن n تابعا مستقلة خطيا في الفضاء $R^s(M)$. لتكن $t_1, \ldots, t_n$ نقاطا مختلفة من الفضاء M وليكن $d = \min_{j,k} \rho(t_j, t_k)$ نعتبر تابعا مستمرا $y = \varphi(x)$ للمتغير الحقيقي

يساوي 1 من اجل $x = 0$ وَ 0 من اجل $|x| \geqslant d$. إن التابع $\rho(t_j, t)$ مستمر بالنسبة لِـ t (21.5 ـ ب) إذن فإن $x_j(t) = \varphi[\rho(t_j, t)]$ مستمر ايضا بالنسبة لِـ t (51.5) إن التابع $x_j(t)$ يساوي حسب انشائه، 1 من اجل $t = t_j$ وَ 0 من اجل $t = t_k, k \neq j$. نفرض وجود العلاقة:

$$\alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0$$

وهذا على كل M. نضع في هذه العلاقة $t = t_j$ فنحصل على $\alpha_j = 0$ $(j=1, \ldots, n)$، ومنه يأتي الاستقلال الخطي للتوابع $x_j(t)$.

ص. تسمى مجموعة جزئية $E \subset K$ فضاء جزئيا من الفضاء K إذا كان لدينا $x + y \in E$ وَ $\alpha x \in E$ مهما كان x وَ y في E ومهما كان العدد $\alpha \in K$.

يوجد في كل فضاء شعاعي K فضاءان جزئيان خاصان هما الفضاء المؤلف من العنصر الوحيد 0 ويسمى الفضاء الجزيئي المنعدم، والفضاء K نفسه. تسمى باقي الفضاءات الجزئية من K **الفضاءات الجزئية الذاتية**

ط. المجاميع المباشرة نقول عن فضاء K إنه **مجموع مباشر** للفضاءات الجزئية $L_1, \ldots, L_n$ من K إذا استطعنا من اجل كل $x \in K$ ايجاد تفكيك:

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \ x_1 \in L_1, \ldots, x_n \in L_n$$

وكان هذا التفكيك وحيداً اي إذا كانت الكتابة:

$$x = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n, \ x_j \in L_j, \ y_j \in L_j \qquad (2)$$

(حيث $j = 1, \ldots, n$) تستلزم $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$

يمكن تعويض الشرط (2) الخاص بوحدانية كل عنصر x بشرط ابسط منه وهو وحدانية تفكيك الصفر: إذا وجد تفكيك:

$$0 = x_1 + \ldots + x_m, \ x_1 \in L_1, \ldots, x_m \in L_m \qquad (3)$$

فإن: $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

وهكذا نرى بأن الفضاء R_n مجموع مباشر لِـ n فضاء بعد كل واحد منها يساوي 1، وهذه الفضاءات مولدة عن n شعاعا كيفية مستقلة خطياً. كما

نستطيع وضع الفضاء R_n في شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية ابعادها تخالف 1 ، ويتم ذلك بعدة طرق. نشير عموما انه يوجد من اجل كل فضاء جزئي $R_n \supset L$ فضاء جزيئي آخر $R_n \supset M$ بحيث يعطي المجموع المباشر لـ L وَ M الفضاء R_n باكمله.

إذا وضع فضاء شعاعي K في شكل مجموع مباشر لفضاءات جزئية $L_1, \ldots, L_m$ فإن كل فضاءين من هذه الفضاءات لا يشتركان الآ في شعاع واحد هو الشعاع المنعدم (14 ;54. 2).

ع. **فضاء النسبة.** نقول عن عنصرين $x \in K$ وَ $y \in K$ إنهما **متكافئان** بالنسبة لفضاء جزئي $L \subset K$ إذا كان $x - y \in L$. نرمز لعلاقة التكافؤ بـ $x \overset{L}{\sim} y$ او باختصار $x \sim y$.

تسمى المجموعة X المؤلفة من كل العناصر y المكافئة لعنصر معطى x صف تكافؤ وفق المجموعة الجزيئية L او باختصار صفا يحوي الصف X العنصر x نفسه، ويكون كل عنصرين من نفس الصف متكافئين! اخيراً إذا كان $z \notin X$ فإن z لا يكافيء اي عنصر $y \in X$. وبالتالي هناك احتمالان لا ثالث لها إذا اعتبرنا صفين كيفيين: اما ان يكونا متطابقين واما ان يكون تقاطعهما خالياً.

يمثل الفضاء K اتحاد الصفوف غير المتقاطعة مثنى مثنى . . . ,X, Y نرمز لمجموعة هذه الصفوف بـ K/L ، نعرف على المجموعة K/L عمليتين خطيتين على النحو التالي. ليكن X وَ Y صفين و α ، β عددين؛ نريد تعريف الصف $Z = \alpha X + \beta Y$ نختار لهذا الغرض، بطريقة كيفية عنصرين $x \in X$ وَ $y \in Y$ ونبحث عن الصف Z الذي يحوي العنصر $z = \alpha x + \beta y$، نرمز للصف المطلوب بـ $\alpha X + \beta Y$ يمكن البرهان على ان هذا الصف معرف بطريقة وحيدة وان العمليتين المدخلتين بهذه الطريقة تتمتعان بمسلمات 11. 12 إن صفر الفضاء K/L هو الصف الذي يحوي 0 من الفضاء K وهو بالتالي الفضاء الجزيئي L نفسه. اما نظير الصف فهو الصف المؤلف من العناصر

النظيرة لعناصر الصف X . يجد القاريء براهين على كل هذه القضايا في [84. 2; 14].

يسمى الفضاء K/L الذي انشأناه آنفا **فضاء النسبة** للفضاء L وفق الفضاء الجزيئي .

ف . تماثلات الفضاءات الشعاعية ليكن X وَ Y فضاءين شعاعين على نفس الحقل K . يسمى تطبيق $y = \omega(x)$ من الفضاء X في الفضاء Y **تماثلا** (او مؤثرا خطياً) من الفضاء X في الفضاء Y إذا كانت المساواة التالية محققة من اجل كل عنصرين x_1 ، x_2 من الفضاء X ومن اجل كل عددين α_1 ، α_2 من K :

$$\omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \omega(x_1) + \alpha_2 \omega(x_2)$$

إذا كان تماثل ω تطبيقا من الفضاء X على كل فضاء Y فإننا نقول ان ω تماثل غامر . وإن كان ω تطبيقا ليس بالضرورة غامرا لكنه متباين يسمى ω تماثلا متبايناً . يسمى تماثل متباين من الفضاء X على كل الفضاء Y اي تطبيق متباين وغامر من X على Y يحتفظ بالعمليتين الخطيتين **تشاكلا** (طبقا للتعريف العام لتشاكل البنيات 2 .25) . نرمز في معظم الاحيان لتماثل ω بـ:

$$\omega: X \to Y$$

إذا كان X فضاء جزئيا من فضاء Y فإن التطبيق ω الذي يصل كل عنصر $x \in X$ بالعنصر ذاته بصفته عنصراً من Y تماثل متباين $\omega: X \to Y$ ، اما التطبيق ω' الذي يصل كل عنصر $x \in Y$ بالصف $\bar{U} \in Y/X$ الذي ينتمي اليه هذه العنصر x فهو تماثل غامر: $\omega' : Y \to Y/X$.

نظرية . إن كل فضاء مجرد ذي n بعدا K_n على حقل K متشاكل مع الفضاء ذي n بعداً K_n .

البرهان . لتكن $f_1, \ldots, f_n$ جملة n شعاعا مستقلة خطيا من الفضاء K_n . من اجل $x \in K_n$ ، يوجد تمثيل $x = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ وحيد حسب (ج) نصل الشعاع x بالشعاع $y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K_n$. نحصل بذلك

على تقابل $\omega: K_n \to K_n$ يحتفظ، كما هو واضح، بالعمليتين الخطيتين اي انه تشاكل.

مثال. R_n/R_m (حيث $m<n$) متشاكل مع R_{n-m}.

ق. الجداءات الديكارتية. إذا كان X وَ Y فضاءين شعاعين يمكننا تشكيل جدائهما الديكارتي P (X, Y) (28.2) المؤلف من كل الثنائيات الممكنة (x, y) ، $x \in X$ وَ $y \in Y$. ندخل على الجداء الديكارتي العمليتين الخطيتين «وفق الاحداثيات»:

$$\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

نتأكد بسهولة من ان المسلمات 11.12 محققة. من البديهي ان الفضاء P (X, Y) يحوي فضاءين جزئيين:

$$X^* = \{(x, y): y = 0\}, \quad Y^* = \{(x, y): x = 0\},$$

متشاكلين (ف) على التوالي مع الفضاءين X وَ Y. لدينا زيادة على ذلك من اجل كل عنصر $(x, y) \in$ P (X, Y):

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

إن التفكيك الاخير للعنصر (x, y) الى حدين منتميان على التوالي لِـ X^* وَ Y^* تفكيك وحيد (حسب تعريف الجمع في P (X, Y) وكذا المساواة بين عناصر (P (X, Y)). وهكذا فإن الجداء الديكارتي لفضاءين X وَ Y هو المجموع المباشر لفضاءيه الجزئيين X^* وَ Y^* المتشاكلين على التوالي مع X وَ Y.

51.12. المؤثرات الخطية

أ. تسمى التماثلات الفضاءات الشعاعية في الاستدلالات التحليلية غالبا المؤثرات الخطية وهكذا فإن مؤثر خطياً من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y تطبيق $A: X \to Y$ يحقق الشرط:

$$A (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

وذلك من اجل كل x_1 وَ x_2 في X وكل α_1 وَ α_2 في K. إذا كان: Y = X نقول ان A مؤثر خطي في الفضاء X

ب. إن المؤثر الذي يصل كل شعاع $x \ni X$ بالشعاع المنعدم من الفضاء Y هو بطبيعة الحال مؤثر خطي من X في Y يسمى **المؤثر المنعدم**.

ج. إن المؤثر الذي يصل كل شعاع $x \ni X$ بالشعاع نفسه مؤثر خطي في X؛ يسمى هذا المؤثر **مؤثر الوحدة** أو **المؤثر المطابق** ونرمز له بـ E.

د. إن كان الفضاء Y وحيد البعد فإن كل مؤثر خطي A يسمى **تابعية خطية**. يستعمل هذا الاصطلاح خاصة في الحالة التي يكون فيها X فضاء بعده غير منته؛ اما اذا كان البعد منتهيا فيغلب استعمال مصطلح «التابع الخطي».

ر. إذا وجد مؤثران خطيان A_1 وَ A_2 من فضاء X في فضاء Y يمكننا تعريف مجموعهما $A_1 + A_2$ وجداء المؤثر A_1 في عدد α حسب القاعدة التالية:

$$(A_1 + A_2)\, x = A_1 x + A_2 x$$
$$(\alpha A_1)\, x = \alpha\, (A_1 x);$$

ونحصل في الحالتين على مؤثر خطي من X في Y.

س. من اليسير الملاحظة بأن عملية جمع المؤثرات وعملية ضربها في الاعداد تتمتعان بالمسلمات 12 .11 التي تحكم عمليتي الفضاء الشعاعي. وهكذا تشكل المجموعة L (X, Y) المؤلفة من كل المؤثرات الخطية من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y فضاء شعاعياً. نلاحظ ان صفر الفضاء L (X, Y) هو المؤثر المنعدم (ب).

ص. جداء المؤثرات. إذا كان B مؤثرا خطيا من فضاء X في فضاء Y وكان A مؤثرا خطياً من الفضاء Y في فضاء Z (لكل هذه الفضاءات نفس الحقل K) فإن المؤثر $P = A \cdot B$ او باختصار AB معرف كمؤثر من X في Z وفق الدستور:

$$Px \equiv (AB)\, x = A\, (Bx)$$

(اي ان المؤثر B يعمل على شعاع $x \ni X$ ثم يتلوه المؤثر A الذي يعمل على النتيجة Bx وهو شعاع ينتمي للفضاء Y). إن المؤثر المحصل عليه $P = AB$ مؤثر خطي من X في Z . لدينا العلاقات التالية:

$$\alpha (AB) = (\alpha A) B = A (\alpha B)$$
$$A (B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2,$$
$$(A_1 + A_2) B = A_1B + A_2B,$$
$$A (BC) = (AB) C,$$

التي تعبر عن قوانين التجميع والتوزيع الخاصة بضرب المؤثرات يرمز α في هذه العلاقات لعدد كيفي من K؛ اما A, A_1, A_2 فهي مؤثرات من الفضاء Y في الفضاء Z ، وَ B, B_1, B_2 مؤثرات من الفضاء X في الفضاء Y ، اما طرفا المساواة الاخيرة فهما مؤثران من W في Z. إذا رمزنا بـ E_X (E_Y) لمؤثر الوحدة في الفضاء $X (Y)$ فإن لدينا ايضا المساواة التالية من اجل كل مؤثر B من X من Y :

$$E_YB = BE_X = B$$

يمكن ضرب المؤثرات في X في بعضها البعض باي ترتيب كان؛ ونحصل بعد هذه العملية على مؤثر في X. لكن هذا الضرب ليس تبديليا عموما حيث نجد باعتبار بعض ثنائيات المؤثرات A ، B, ان $AB \neq BA$. نبقى في حالة المؤثرات في X ونشير الى اننا نستطيع تعريف قوى مؤثر A في X :

$$A^0 = E_X,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A,\ \ldots,\ A^{k+1} = A^k \cdot A,\ \ldots$$

ط . نستطيع ان نصل كل كثير حدود $p(\lambda)$ ذي معاملات منتمية للحقل K:

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{1}$$

وكل مؤثر A في الفضاء X «كثير حدود مؤثر»:

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \tag{2}$$

وهو مؤثر خطي في الفضاء X؛ اما مجموع وجداء كثيرات حدود من الشكل (2) فيوافقان مجموع وجداء كثيرات الحدود الموافقة للشكل (1).

ع. ليكن A مؤثرا من فضاء Y في فضاء X وB مؤثرا من X في Y. عندئذ إذا كان $AB = E_X$، فإن المؤثر A يسمى **مقلوب المؤثر** B **من اليسار** ويسمى المؤثر B **مقلوب المؤثر** A **من اليمين**. إذا عمل المؤثر B في X فقد نجد من بين المؤثرات في X مقلوبا لـ B من اليسار ومقلوبا له من اليمين. إن كان لمؤثر مثل B مقلوب من اليسار A ومقلوب من اليمين C فإن هذين المؤثرين متطابقان:

$$A = AE_X = A\,(BC) = (AB)\,C = E_XC = C$$

ينتج من المساواة السابقة ان كل مقلوب من اليسار (من اليمين) في هذه الحالة، للمؤثر B مطابق لـ $C = A$. يسمى هذا المؤثر $A = C$ المعرف بطريقة وحيدة مقلوب المؤثر B ونرمز له بـ B^{-1}.

نشير في حالة الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية انه توجد مؤثرات تقبل مقلوبا من اليسار (وحتى مجموعة غير منتهية من المقلوبات من اليسار المختلفة) ولا تقبل اي مقلوب من اليمين والعكس بالعكس.

ف. ليكن A مؤثرا في فضاء X. نقول عن فضاء جزيئي $X' \subset X$ انه **لامتغير** بالمؤثر A اذا أدى $x \in X'$ الى $Ax \in X'$.

ق. نقول عن شعاع غير منعدم $f \in X$ انه **شعاع ذاتي** لمؤثر A في الفضاء X إذا كان:

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \in K)$$

يسمى العدد λ **قيمة ذاتية** للمؤثر A ملحقة بالشعاع الذاتي f. من البديهي ان كل شعاع ذاتي f يولد فضاء جزئياً لامتغير وحيد البعد مؤلفا من كل الاشعة αf حيث $\alpha \in K$.

إن كل عبارة خطية لاشعة ذاتية للمؤثر A ملحقة بنفس القيمة الذاتية λ تمثل ايضا شعاعا ذاتيا للمؤثر A الملحقةبنفس القيمة الذاتية λ تشكل فضاء جزئيا في الفضاء X؛ يسمى هذا الفضاء **الفضاء الجزيئي الذاتي** للمؤثر A الملحق بالقيمة الذاتية λ

س. إن الاشعة الذاتية $f_1, \ldots, f_n$ للمؤثر A الملحقة على التوالي بالقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مستقلة خطيا. ذلك اننا إذا فرضنا الارتباط الخطي لـ n شعاعا ذاتيا فإننا نجد $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$ وبتطبيق المؤثر A وازالة احد الاشعة يمكننا المرور الى الارتباط الخطي لعدد اصغر من الاشعة الذاتية، يسمح ذلك بتطبيق نفس الاستدلال بالتدريج.

12 .61 . امثلة في المؤثرات الخطية في الفضاءات المحسوسة.

أ. لتكن $A = \| a_{jk} \|$ مصفوفة $m \times n$ (اي مصفوفة ذات m سطراً وَ n عمودا) مؤلفة من عناصر منتمية للحقل K. نختار اساسا $e_1, \ldots, e_n$ في فضاء ذي n بعدا K_n واساسا $f_1, \ldots, f_m$ في فضاء ذي m بعداً K_m نصل كل شعاع $K_n \ni x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ بشعاع $K_m \ni y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j$ وفق القاعدة:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \ldots, m$$

نحصل بهذه الطريقة على مؤثر خطي من الفضاء K_n في الفضاء

ب. في حالة «المستمر» نلاحظ ان المؤثر:

$$(1) \qquad y(s) = Ax(s) = \int_a^b A(s, t)\, x(t)\, dt$$

مماثل للمؤثر الوارد في المثال السابق. يرمز $x(t)$ هنا العنصر من الفضاء $R^s(a, b)$، اما $A(s, t)$ فهو تابع حقيقي لمتغيرين معرف من اجل $a \leqslant t \leqslant b$، $c \leqslant s \leqslant d$؛ واما $y(s)$ فهو تابع معرف من اجل $c \leqslant s \leqslant d$. نتأكد بسهولة من ان التابع $y(s)$ مستمر على $[c, d]$ إن كان التابع $A(s, t)$ كذلك على المستطيل $c \leqslant s \leqslant d$، $a \leqslant t \leqslant b$. يكون المؤثر A في هذه الحالة مؤثرا خطياً من الفضاء $R^s(a, b)$ في الفضاء $R^s(c, d)$.

يسمى المؤثر (1) مؤثر فريدولم **Fredholm** التكاملي. سنتناول بالتفصيل مؤثرات فريدولم ضمن 12 .89.

ج. هناك حالة خاصة من المؤثر ب هو مؤثر المكاملة:

$$Ix(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau, \quad a\leqslant t\leqslant b$$

في الفضاء $R^s(a, b)$

د. تقدم العبارة:

$$F(x)=\int_a^b f(\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

حيث $f(t)$ تابع (مستمر) مثبت، مثالا لتابعية خطية معرفة في الفضاء $R^s(a, b)$.

12 .71 . المؤثرات الخطية في الفضاءات ذات الابعاد المنتهية.

أ. نقدم هنا الشكل العام لمؤثر خطي A من فضاء ذي n بعدا K_n في فضاء ذي m بعدا K_m . ليكن $e_1, \ldots, e_n$ اساساً في الفضاء K_n وَ et $f_1, \ldots, f_m$ اساسا في الفضاء K_m . بتطبيق المؤثر A على الاشعة $e_1, \ldots, e_n$ نجد

$$\left\{\begin{array}{l} Ae_1=a_{11}f_1+\ldots+a_{m1}f_m, \\ Ae_2=a_{12}f_1+\ldots+a_{m2}f_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n=a_{1n}f_1+\ldots+a_{mn}f_m, \end{array}\right. \qquad (1)$$

حيث a_{ij} اعداد من الحقل K.

وهكذا نلاحظ بعد تثبيت الاساسين $\{e\}$ وَ $\{f\}$ في الفضاءين K_n وَ K_m ان المؤثر A موصول بمصفوفة $m\times n$:

$$A=\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right\|$$

يتألف هنا العمود j من احداثيات الشعاع Ae_j ضمن الاساس $f_1, \ldots, f_m$.

ليكن الآن $x=\sum_1^n \xi_k e_k$ شعاعا كيفيا من K_n وليكن:

$$Ax=\sum_1^m \eta_j f_j \in K_m$$

لدينا:

$$\sum_{1}^{m} \eta_j f_j \equiv Ax = \sum_{1}^{n} \xi_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} a_{jk} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k \right) f_j$$

ومنه:

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, \ldots, m) \qquad (2)$$

وبذلك ندرك ان ما قدم في المثال 61. 12 ـ أ هو في الواقع الشكل العام لمؤثر من الفضاء K_n في K_m.

إذا عمل المؤثر الخطي A في K_n فإن $m = n$ وتصبح المصفوفة A مربعة.

إذا طبق المؤثر الخطي A في K_n في K_1 (فضاء وحيد البعد) فإن $m = 1$ وتأخذ المصفوفة A الشكل:

$$A = \| a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n \|$$

يعمل المؤثر A في هذه الحالة وفق الدستور:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$$

(لم يُصرح هنا باساس الفضاء K_1، المؤلف من شعاع واحد) ويمثل تابعا خطياً.

ب. تقابل العمليات المعرفة ضمن 51. 12 ر ـ س الخاصة بالمؤثرات الخطية عملية مماثلة على المصفوفات، ليكن $e_1, \ldots, e_n$ اساسا في فضاء X و $f_1, \ldots, f_m$ اساسا في فضاء Y. إذا كان A_1 وَ A_2 مؤثرين يطبقان X في Y فإنهما موصولان بالمصفوفتين $A_1 = \| a_{ij}^{(1)} \|$ وَ $A_2 = \| a_{ij}^{(2)} \|$ على التوالي بحيث:

$$A_1 e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(1)} f_i, \quad A_2 e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{(2)} f_i \quad (j = 1, \ldots, n)$$

لدينا من أجل كل α_1 وَ α_2 في K:

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) e_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)}) f_i$$

أي ان المصفوفة $\| \alpha_1 a_{ij}^{(1)} + \alpha_2 a_{ij}^{(2)} \|$ موصولة بالمؤثر الخطي: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$. وهكذا نرى اننا نحصل على المصفوفة الموصولة

بمجموع مؤثرات والمصفوفة الموصولة بجداء مؤثر في عدد بجمع مصفوفات المؤثرات « عنصرا عنصرا » وبضرب مصفوفة المؤثر في العدد المعتبر، على التوالي.

ج. ينتج من ذلك أن الفضاء الشعاعي $L(K_n, K_m)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية من فضاء ذي n بعدا K_n في فضاء ذي m بعداً K_m متشاكل مع الفضاء ذي nm بعداً K_{nm}.

د. ننشيء المصفوفة الملحقة بجداء مؤثرين. نختار اساسا $e_1, \ldots, e_n$ في الفضاء X واساسا $f_1, \ldots, f_m$ في الفضاء Y واساسا $g_1, \ldots, g$ في الفضاء Z. نفرض أن لدينا مؤثرا B من X في Y مصفوفته $m \times n$: $B = \| b_{jk} \|$ بحيث.

$$Be_k = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} f_j \quad (k = 1, \ldots, n)$$

وان لدينا مؤثرا A من Y في Z مصفوفته $q \times m$: $A = \| a_{ij} \|$ بحيث

$$Af_j = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} g_i \quad (j = 1, \ldots, m)$$

نحصل بخصوص الجداء $P = AB$ على:

$$ABe_k = A(Be_k) = A\left(\sum_{j=1}^{m} b_{jk} f_j\right) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} Af_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{q} b_{jk} a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}\right) g_i$$

وبالتالي فإن العناصر p_{ik} للمصفوفة p الموافقة للمؤثر $P = AB$ تكتب على الشكل:

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \quad (i = 1, \ldots, q,\ k = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

تسمى المصفوفة $P = \| p_{ik} \|$ المحصل عليها انطلاقا من المصفوفتين: $A = \| a_{ij} \|$ وَ $B = \| b_{jk} \|$ حسب الدستور (3) جداء المصفوفة الاولى في الثاني.

يمكننا إذن ضرب مصفوفة $q \times m$ في مصفوفة $m \times n$ ونجد

حاصل الضرب مساويا لمصفوفة $q \times n$.

إذا كان $Z = Y = X$ فإن A و B مصفوفتان مربعتان $n \times n$ والجداء AB هو ايضا مصفوفة مربعة $n \times n$.

ر. ليكن A مؤثرا يعمل في فضاء ذي n بعداً K_n . إذا كنا نعرف المصفوفة $\| a_{jk} \|$ الموافقة للمؤثر A بالنسبة لأساس $\{e\} = (e_1, \ldots, e_n)$ فإننا نستطيع ايجاد القيم الذاتية للمؤثر (12 .51 ـ ق) في شكل جذورها المميزة أي جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

إذا كان λ_0 جذرا للمعادلة (4) فإننا نستطيع ايجاد احداثيات الشعاع الذاتي الموافق له $f = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ التي تؤلف حلول الجملة التالية المكوّنة من معادلات خطية متجانسة:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0)\, \xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda_0)\, \xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)\, \xi_n = 0 \end{array} \right. \qquad (5)$$

تقبل هذه الجملة حلولا غير منعدمة.

س. لنصف بنية مؤثر خطية كيفي في فضاء عقدي أو حقيقي K_n * .

من أجل كل مؤثر خطي A في فضاء عقدي C_n فإن هذا الفضاء يقبل تفكيكا الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية اللا متغيرة تكون مصفوفة المؤثر A في كل فضاء من هذه الفضاءات، ضمن اساس مختار اختيارا جيداً، من الشكل.

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{Vmatrix}$$

* انظر [١٤، الفصل 6]

(«الخانة الجوردانية»). يسمى اساس الفضاء C_n المحصل عليه بضم اسس الفضاءات الجزئية اللا متغيرة، المذكورة اعلاه **اساساً جوردانيا للمؤثر A** وتسمى مصفوفة المؤثر A بالنسبة لهذا الاساس (وهي مصفوفة شبه قطرية ذات خانات قطرية شكلها الشكل (6)) **مصفوفة جوردانية للمؤثر A** . إن الاعداد λ وأبعاد الخانات الجوردانية (6) لا متغيرة بواسطة المؤثر A (أي لا تتعلق باختيار الاساس الجورداني)؛ اما الاعداد λ فتمثل جذورا للمعادلة (4) ويمكن ايجاد ابعاد الخانات الجوردانية باعتبار القواسم الاولية للمؤثر A .

مَن اجل كل مؤثر خطي A في فضاء حقيقي R_n ، فإن هذا الفضاء يقبل تفكيكاً الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية اللامتغيرة تكون مصفوفة المؤثر A في كل فضاء من هذه الفضاءات، ضمن اساس مختار اختيارا جيداً، من الشكل (6) أو من الشكل:

$$\begin{Vmatrix} \sigma & \tau & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tau & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \tau & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & \sigma & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\tau & \sigma \end{Vmatrix}$$

(«الخانة الجوردانية الحقيقية»). يسمى: اساس الفضاء R_n المحصل عليه بضم اسس الفضاءات الجزئية اللامتغيرة، المذكورة اعلاه **اساسا جوردانيا حقيقيا للمؤثر A** ، وتسمى مصفوفة المؤثر A بالنسبة لهذا الاساس (وهي مصفوفة شبه قطرية ذات خانات قطرية من الشكل (6) وَ (7)) **مصفوفة جوردانية حقيقية للمؤثر A** . إن الاعداد λ ، σ ، τ ، وكذا ابعاد الخانات الجوردانية (6) وَ (7) لا تتعلق باختيار الاساس الجورداني الحقيقي؛ تمثل الاعداد λ و $\sigma + i\tau$ جذورا للمعادلة (4)، يمكننا تعيين ابعاد الخانات الجوردانية (6) و (7) باعتبار القواسم الجوردانية الحقيقية للمؤثر A .

بصفة خاصة، إذا كانت جميع حلول المعادلة (4) بسيطة فإن المصفوفة الجوردانية للمؤثر A في فضاء عقدي C_n تأخذ الشكل (مع العلم أن العناصر غير المكتوبة منعدمة):

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

نلاحظ في حالة فضاء حقيقي أن المعادلة (4) تقبل مع جذرها: $\lambda = \sigma + i\tau$ غير الحقيقي الجذر المرافق $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$، إذا كانت جميع الجذور بسيطة ورمزنا لجذور (4) غير الحقيقيــة بـ: $\sigma_1 \pm i\tau_1, \ldots, \sigma_k \pm i\tau_k$ وللجــذور الحقيقية بـ: $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ فإن المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A تأخذ الشكل:

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_1 & \tau_1 & & & & & & & \\ -\tau_1 & \sigma_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \sigma_k & \tau_k & & & & \\ & & & -\tau_k & \sigma_k & & & & \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

إن المصفوفة الجوردانية، في فضاء عقدي، لكل مؤثر قابل لمصفوفة هيرميتية $(\overline{a_{jk}} = a_{kj},\ j,\ k = 1, \ldots, n)$ بالنسبة لأساس تقبل أيضا الشكل القطري؛ وتكون الاعداد λ_j الموافقة لذلك حقيقية، في هذه الحالة. اما في حالة فضاء حقيقي فإن المصفوفة الجوردانية الحقيقية لكل مؤثر قابل لمصفوفة تناظرية $(a_{jk} = a_{kj},\ j,\ k = 1, \ldots, n)$ بالنسبة لأساس تقبل، هي الاخرى، الشكل القطري. إن كانت مصفوفة مؤثر A، ضمن اساس فضاء حقيقي، لا تناظرية $(a_{jk} = -a_{kj},\ j,\ k = 1, \ldots, n)$ فإن المصفوفة الجوردانية للمؤثر A تأخذ الشكل (9)، حيث الاعداد: $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ منعدمة كلها.

12 .81. الجبور.

أ. نقول عن فضاء شعاعي U على حقل K انه جبر (على وجه التحديد: جبر على K) إذا عرفنا على العناصر $x, y, \ldots$ لـ U عملية ضرب نرمز لها بـ $x \cdot y$ (أو xy) تتمتع بالشروط التالية:

(1) $\alpha (xy) = (\alpha x) y = x (\alpha y)$ من أجل كل x و y في U ومن اجل كل α:

(2) $(xy) z = x (yz)$ مهما كان x ، y ، z في U.

(3) $(x + y) z = xz + yz$ مهما كان x ، y ، z في U.

(4) $x (y + z) = xy + xz$ مهما كان x ، y ، z في U.

يسمى الشرطان (1) وَ (2) قانوني التجميع ويسمى الشرطان (3) وَ (4) قانوني التوزيع.

ب. قد يكون الضرب غير تبديلي أي أن المساواة $xy = yx$ قد تكون غير صحيحة من أجل بعض الثنائيات x ، y من U. إن كانت المساواة $xy = yx$ صحيحة من أجل كل ثنائية x ، y من U فإننا نقول عن الجبر U إنه تبديلي.

ج. يسمى عنصر $e \in$ U وحدة الجبر U إذا تحققت المساواة $ex = xe = x$ من أجل كل $x \in$ U. يسمى عنصر $y \in$ U مقلوب عنصر x إذا تحققت المساواة:

$$xy = yx = e$$

د. نقول عن فضاء جزئي $V \subset$ U إنه جبر جزئي من الجبر U إذا ادت العلاقتان $x \in V$ وَ $y \in V$ الى العلاقة $xy \in V$.

ر. نقول عن جبر جزئي $J \subset$ U إنه مثالي من اليسار للجبر U إذا ادت العلاقتان $x \in$ U وَ $y \in J$ الى العلاقة $xy \in J$ ، ونقول إنه مثالي من اليمين إذا ادت العلاقتان $y \in J$ وَ $z \in$ U الى $yz \in J$ ، إذا كان جبر جزئي مثاليا من اليسار ومن اليمين فإننا نقول عنه إنه مثالي ثنائي الجانب

أو باختصار **مثالي**. نلاحظ في الجبور التبديلية انه لا فرق بين مثالي ومثالي من اليسار ومثالي مي اليمين.

يوجد في كل جبر U مثاليان خاصان أولها مكون من عنصر واحد هو العنصر المنعدم ويسمى **المثالي المنعدم** وثانيهما هو الجبر U نفسه. تسمى المثاليات الاخرى **مثاليات ذاتية**.

س. نستطيع في فضاء النسبة U/J لجبر U على مثالي J منه تعريف، بخصوص الصفوف ... ,X, Y ، ليس فحسب العمليتان الخطيتان (كما ورد في 41.12 ـ ع) بل أيضا عملية ضرب: من أجل صفين X وَ Y ومن أجل عنصرين $x \in X$ وَ $y \in Y$ مختارين اختياراً كيفياً، نعرف الجداء XY كصف يحوي الجداء xy . يمكن البرهان على أن هذا التعريف سليم (أي أن الصف XY لا يتعلق باختيار العنصرين $x \in X$ وَ $y \in Y$) وان الفضاء U/J ، بعملية الضرب هذه، هو ايضا جبر. يسمى هذا الجبر **جبر نسبة الجبر U على المثالي** J . إن كان الجبر U تبديليا فإن الامر كذلك فيها يخص الجبر U/J .

ص. **تماثلات الجبور**. ليكن U وَ V جبرين على نفس الحقل K. نقول عن تطبيق $\omega: U \to V$ إنه **تماثل** من الجبر U في الجبر V إذا كان تماثلا من الفضاء الشعاعي U في الفضاء الشعاعي V (41.12 ـ ف) وإذا حقق كل عنصرين x_1 ، x_2 من الجبر U العلاقة $\omega(x_1x_2) = \omega(x_1)\cdot\omega(x_2)$

نقول عن تماثل ω إنه تشاكل (تماثل غامر، تماثل متباين) من الجبر U في الجبر V إذا كان تشاكلا (تماثلا غامرا، تماثلا متباينا) من الفضاء U في الفضاء V .

وهكذا فإن التطبيق $\omega: U \to U/J$ الذي يصل كل عنصر $x \in U$ بالصف $X \in U/J$ الذي يحويه تماثل غامر من الجبر U على الجبر U/J .

ط. من أجل كل تماثل $\omega: U \to V$ فإن مجموعة العناصر $x \in U$ التي تحقق

$\omega(x) = 0$ تشكل مثاليا J في الجبر U . إن كان ω معطى، نعرف التماثل ω من الجبر U/J في الجبر V وهذا بوصل صف $X \in U/J$ بالعنصر $\omega(x) \in V$ ، حيث x عنصر كيفي من الصف X . إن هذا التماثل متباين. إذا كان التماثل ω غامر من الجبر U في الجبر V فإن $\tilde{\omega}$ يصبح تشاكلات [14 ؛ 2.6§].

91.12 . امثلة في الجبور وتماثلاتها.

أ. تشكل المجموعة P المؤلفة من كل كثيرات الحدود (من اية درجة) لـ λ.

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

ذات المعاملات المنتمية لحقل K ، باعتبار عمليات الجمع والضرب المعتادة على كثيرات الحدود، تشكل جبراً. إن هذا الجبر تبديلي ويملك وحدة.

ب. تشكل المجموعة $U(G)$ المؤلفة من كل التوابع التحليلية $f(\lambda)$ المعرفة في ساحة G في المستوى العقدي، جبراً عقديا بعمليات الجمع والضرب المعتادة على التوابع (27.4). إن هذا الجبر تبديلي أيضا وله وحدة.

يوجد في الجبر $U(G)$ مؤثر يصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$ بمشتقة $f'(\lambda)$: وهو بطبيعة الحال خطي؛ نشير بخصوص هذا المؤثر أن دستور ليبنتيز zinbieL قائم:

$$(f(\lambda)\, g(\lambda))^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!\,(m-j)!} f^{(j)}(\lambda) g^{(m-j)}(\lambda) \qquad (1)$$

ج. نسمي طيفا كل مجموعة منتهية من الاعداد $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (المنتمية لحقل K) حيث نلحق كل λ_k بعدد طبيعي r_k $(k = 1, \ldots, m)$ يسمى تضاعف λ_k . نسمي «مُدَوَّنة»، ونرمز لها بـ f ، كل مجموعة $r = r_1 + \ldots + r_m$ عدداً من الحقل K ، نرمز لهذه الاعداد بـ $k = 1, \ldots, m$ ، $j = 0, \ldots, r_k - 1$ اخيرا نرمز بـ F (S)

لمجموعة كل المدوّنات على طيف معطى S .

ندخل على $F(S)$ عمليات الجمع والضرب التالية:

$$(f+g)_{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) + g_{(j)}(\lambda_k),$$
$$(\alpha f)_{(j)}(\lambda_k) = \alpha f_{(j)}(\lambda_k),$$
$$(fg)_{(j)}(\lambda_k) = \sum_{i=1}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} f_{(i)}(\lambda_k)\, g_{(j-i)}(\lambda_k)$$

(حيث $k = 1, \ldots, m$ ، $j = 0, \ldots, r_k - 1$).

فيما يخص الدستور الاخير يجب تعويضه في حالة $j = 0$ بـ:

$$(fg)_{(0)}(\lambda_k) = f_{(0)}(\lambda_k) \cdot g_{(0)}(\lambda_k)$$

يصبح بذلك المجموعة $F(S)$ جبرا بعده r على K .

د . ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء عقدي ذي بعدا n C_n . تمثل مجموعة كل كثيرات الحدود $p(A)$ للمؤثر A (51.12 ـ ط) المزودة بعمليات الجمع والضرب المعتادة على المؤثرات، جبرا عقديا نرمز له بـ $P(A)$. إن هذا الجبر متشاكل مع جبر المدونات $F(S_A)$ (المثال ج)، يرمز S_A لطيف المؤثر A أي مجموعة كل القيم الذاتية (المختلفة) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ للمؤثر A حيث نلحق بكل قيمة λ_k تضاعفا هو عدد طبيعي r_k يساوي اكبر بعد من ابعاد الخانات الجوردانية للمؤثر A (71.12 ـ س) التي لها العدد λ_k على القطر. يتم هذا التشاكل بطريقة التالية: نصل كل مدوّنة:

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k),\ j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m\}$$

معرفة على S_A بالمؤثر $f(A)$ الذي لـه مصفوفـة، بـالنسبـة للأسـاس الجورداني للمؤثر A ، ذات بنية شبه قطرية هي بنية لمصفوفة المؤثر A ذاته: حيث نعوض كل خانة $p \times p$ شبه قطرية للمؤثر A :

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{matrix} \right\| \quad (p \leqslant r_k) \qquad (2)$$

بالخانة التي لها نفس البعد $p \times p$:

$$\left\| \begin{matrix} f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f_{(0)}(\lambda_k) & f_{(1)}(\lambda_k) & \dots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(\lambda_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{(0)}(\lambda_k) \end{matrix} \right\| \quad (3)$$

إذا امعنا النظر في هذا المؤثر $f(A)$ وجدناه من الشكل $p(A)$ حيث يحقق كثير الحدود $p(\lambda)$ الشروط:

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j=0, \dots, r_k - 1, k=1, \dots, m)$$

بحيث ان $p^{(j)}(\lambda)$ هو مشتق كثير الحدود $p(\lambda)$ من الرتبة j

انظر البرهان في [14 ؛ 48.6].

ر. ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء عقدي ذي n بعداً C_n ، ولتكن: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ قيمة الذاتية التي نفرضها منتمية كلها لساحة G من المستوى العقدي. نعتبر التطبيق ω من الجبر $U(G)$ ، المؤلف من التوابع التحليلية، في جبر المدونات $F(S_A)$ الذي يصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$ بمدونة الاعداد

$$f_{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) \quad (j=0, \dots, r_k - 1, \ k=1, \dots, m)$$

حيث يرمز $f^{(j)}(\lambda)$ لمشتق $f(\lambda)$ من الرتبة j . يبين دستور ليبنيتز (1) ان التطبيق ω تماثل من الجبر $U(G)$ في الجبر $F(S_A)$ ؛ نلاحظ ان هذا التماثل غامر لأننا نستطيع من أجل كل مدوّنة $\{f_{(j)}(\lambda_k)\}$ ايجاد تابع $f(\lambda)$ من الجبر $U(G)$ (أو حتى كثير حدود) يحقق

$$f^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j=0, \dots, r_k - 1, k=1, \dots, m)$$

بما أن الجبر $F(S_A)$ متشاكل، بدوره، مع الجبر $P(A)$ المؤلف من المؤثرات الخطية (مثال د) فإنه يوجد تماثل غامر من الجبر $U(G)$ على الجبر $P(A)$ ؛ بمراعاة المثال د، فإن هذا التماث لاغامر ينجز كما يلي: فصل كل تابع $f(\lambda) \in U(G)$ بالمؤثر الخطي $f(A)$ الذي له مصفوفة، بالنسبة للأساس الجورداني للمؤثر A ، ذات بنية شبه قطرية هي

بنية مصفوفة المؤثر A نفسه: حيث نعوض كل خانة شبه قطرية (2) بخانة لها نفس البعد $p \times p$:

$$\left\| \begin{matrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\lambda_k) \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-2)!} f^{(p-2)}(\lambda_k) \\ 0 & 0 & f(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(p-3)!} f^{(p-3)}(\lambda_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_k) \end{matrix} \right\|$$

وهكذا فإن المؤثرات $e^{\lambda A}$ و $\sin \lambda A$ ، الخ لها دائما معنى.

بما ان التطبيق $\tilde{\omega}: f(\lambda) \to f(A)$: تماثل فإن المساواة: $f(\lambda) \cdot g(\lambda) = h(\lambda)$ ، حيث $h(\lambda)$ ، $g(\lambda)$ ، $f(\lambda)$ تنتمي الى $U(G)$ ، تستلزم $f(A) \cdot g(A) = h(A)$ لدينا مثلا المساواة:

$$e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A}$$

س. نقول عن طيف S باعتبار الاعداد $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ عقدية (المثال ج) إنه تناظري (او متناظر) إن حوى S الى جانب كل: $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$ غير حقيقي العدد المرافق $\bar{\lambda}_k = \sigma_k - i\tau_k$ بنفس التضاعف r_k . نقول عن مدونة $f = \{f_{(j)}(\lambda_k)\}$ على طيف تناظري S إنها تناظرية إذا كانت كل الاعداد $f_{(j)}(\lambda_k)$ اعدادا عقدية مرافقة للأعداد المقابلة لها $f_{(j)}(\bar{\lambda}_k)$.

إن مجموعة كل المدونات التناظرية على طيف تناظري S تمثل (بالعمليات المشار اليها في ج) جبراً حقيقياً نرمز له بـ $F_R(S)$.

ص. ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء حقيقي ذي n بعداً R_n . إن مجموعة كل كثيرات الحدود الحقيقية للمؤثر A تشكل جبراً حقيقياً نرمز له بـ $P_R(A)$. نلاحظ ان هذا الجبر متشاكل مع جبر المدونات التناظرية (س) على طيف المؤثر A (المعتبر في الامتداد العقدي(*) للفضاء الحقيقي R_n)؛ إن هذا الطيف متناظر دوما. اما

* راجع [14، 6، 16].

التشاكل فينجز كما يلي: نصل كل مدوّنة تناظرية:

$$f = \{f_{(j)}(\lambda_k),\ j = 0, \ldots, r_k - 1,\ k = 1, \ldots, m\}$$

معرفة على S_A بالمؤثر $f(A)$ مصفوفته بالنسبة للأساس الجورداني الحقيقي للمؤثر A لما بنية شبه قطرية هي بنية المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A ، حيث نعوض كل خانة شبه قطرية ذات الشكل (2) (λ_k حقيقي) للمؤثر A بخانة من الشكل (3)، كما نعوض كل خانة شبه قطرية من الشكل:

$$\begin{Vmatrix} A_k & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_k & E & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

(حيث رمزنا بـ A_k ، E ، 0 لمصفوفات من الشكل:

$$A_k = \begin{Vmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ -\tau_k & \sigma_k \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

بالخانة التالية التي لها نفس البعد:

$$\begin{Vmatrix} f_{(0)}(A_k) & f_{(1)}(A_k) & \frac{1}{2!} f_{(2)}(A_k) & \ldots & \frac{1}{(p-1)!} f_{(p-1)}(A_k) \\ 0 & f_{(0)}(A_k) & f_{(1)}(A_k) & \ldots & \frac{1}{(p-2)!} f_{(p-2)}(A_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{(0)}(A_k) \end{Vmatrix}$$

حيث:

$$f_{(j)}(A_k) = \begin{Vmatrix} \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) \\ -\operatorname{Im} f_{(j)}(\lambda_k) & \operatorname{Re} f_{(j)}(\lambda_k) \end{Vmatrix}$$

يمكن البرهان على أن المؤثر $f(A)$ له الشكل $p(A)$ ، اما معاملات $p(\lambda)$ فهي حقيقية ولدينا الشروط التالية:

$$p^{(j)}(\lambda_k) = f_{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 1, \ldots, r_{k-1},\ k = 1, \ldots, m)$$

انظر البرهان في [14؛ 88.6].

ط. ليكن A مؤثرا خطيا في فضاء حقيقي ذي n بعدا R_n ، نفرض ان

كل القيم الذاتية للمؤثر A ، باعتبارها ضمن الامتداد العقدي C_n للفضاء R_n ، تنتمي الى ساحة G متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي. إن التماثل ω الوارد في المثال د يصل كل تابع تحليلي حقيقي $f(\lambda) \in U(G)$ بمدونة تناظرية

$$f_{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) \qquad (j = 0, \ldots, r_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m)$$

بما ان الجبر $F_R(S_A)$ المؤلف من كل المدونات التناظرية متشاكل مع الجبر $P_R(A)$ المؤلف من كل كثيرات الحدود الحقيقية للمؤثر A ، فإنه يوجد تماثل غامر من الجبر $U_R(G)$ المؤلف من كل التوابع التحليلية الحقيقية في الجبر $P_R(S_A)$ ؛ ينجز هذا التماثل الغامر، بمراعاة المثال ص، بالطريقة التالية: نصل كل تابع $f(\lambda) \in U_R(G)$ بمؤثر خطي $f(A)$ مصفوفته بالنسبة للأساس الجورداني الحقيقي للمؤثر A لها بنية شبه قطرية هي بنية المصفوفة الجوردانية الحقيقية للمؤثر A ، بحيث نعوض كل خانة شبه قطرية من الشكل (2) (λ_k حقيقي) بخانة من الشكل (3) ونعوض ل خانة من الشكل (4) بخانة من الشكل (5) حيث:

$$f_{(j)}(A_k) = \begin{Vmatrix} \mathrm{Re}\, f^{(j)}(\lambda_k) & \mathrm{Im}\, f^{(j)}(\lambda_k) \\ -\mathrm{Im}\, f^{(j)}(\lambda_k) & \mathrm{Re}\, f^{(j)}(\lambda_k) \end{Vmatrix}$$

ع. يُشكل الفضاء الشعاعي المؤلف من المؤثرات الخطية العاملة في فضاء شعاعي K جبرا (مزوداً بعمليات الجمع والضرب المعتادة على المؤثرات) غير تبديلياً عموماً.

§ 12 .2 الفضاءات المترية

12 .12 . تلعب الفضاءات المترية دورا هاما في دروسنا هذه وذلك ابتداء من الفصل الثالث (الجزء الاول). نذكر هنا بمسلمات الفضاء المتري. نقول عن مجموعة M إنها فضاء متري إذا عرفنا، من اجل كل عنصرين x ، y من عدداً $\rho_M(x, y)$ أو باختصار $\rho(x, y)$ ، يسمى: مسافة x وَ

y، تتوفر فيه الشروط التالية:

أ. $\rho(x, y) > 0$ إن كان $x \neq y$ ، $\rho(x, x) = 0$ مهما كان $x \in M$.

ب. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ مهما كان x وَ y في M .

جـ. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ مهما كان x ، y ، z في M (مسلمة المثلث).

نقول عن متتالية $x_1, x_2, \ldots$ نقاط من فضاء متري M إنها متقاربة نحو نقطة $x \in M$ إن كان

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0$$

12 .22 . اعتبرنا في الفصول السابقة كامثلة للفضاءات المترية مجموعات من المستقيم العددي ومن المستوى ومن الفضاء المعتاد (الاقليدي) باتخاذ المسافة المعتادة. يجدر التنبيه في هذا الاطار ان هناك مجموعات مختلفة من التوابع، التي يمكن جعلها فضاءات مترية وهذا بتزويدها بمسافة (أي بتابع $\rho(x, y)$) مناسبة.

إن اختيار المسافة في فضاء تابعي يتوقف عن متطلبات المسألة المطروحة. إذا تم اختيار مسافة فإنه من الواضح انه عنصرين يكونان قريبين من بعضهما عندما تكون مسافتهما صغيرة. نضطر في معظم الحالات التي نلتقي بها في التحليل الى سلوكه المسلك المعاكس: نرى من خلال معطيات المسألة المعتبرة ما هي العناصر التي من الطبيعي اعتبارها تربية قريبة من بعضها، ومنه تتعين طريقة ادخال المسافة واختيارها.

فمثلا، إنه من الطبيعي غالبا اعتبار تابعين مستمرين $x(t)$ وَ $y(t)$ ($a \leqslant t \leqslant b$) قريبين من بعضهما إن كان المقدار $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$ صغيراً. ولذا يمكن اختيار هذا المقدر بمثابة مسافة $x(t)$ وَ $y(t)$ ؛ من الواضح ان المسلمات أ ـ ج محققة، وبالتالي فإن كل مجموعة M مؤلفة من توابع مستمرة على المجال $[a, b]$ ومزودة بالمسافة:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \qquad (1)$$

تمثل فضاء مترياً.

كما انه من الطبيعي في بعض الحالات (في حساب التغيرات مثلا) التي تكون فيها التوابع قابلة للإشتقاق حتى الرتبة m، اعتبار تابعين $x(t)$ وَ $y(t)$ قريبين من بعضهما إن كانت قيم التابعين قريبة من بعضها البعض وكذا قيم مشتقات هذين التابعين حتى الرتبة m وذلك مهما كان t. يؤدي بنا هذا الى المسافة:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|x(t)-y(t)|, |x'(t)-y'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t)-y^{(m)}(t)|\} \quad (2)$$

إذا اعتبرنا مجموعة توابع $x(t)$ تقبل الاشتقاق باستمرار m مرة وزودناها بالمسافة (2) فإننا نحصل بطبيعة الحال على فضاء متري.

هناك حالات اخرى (في نظرية المعادلات التكاملية مثلا) حيث يكون من الطبيعي اعتبار التابعين $x(t)$ وَ $y(t)$ قريبيْن من بعضهما إذا كانتا كذلك بالمفهوم التكاملي أي إذا كان المقدار:

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|\, dt$$

صغيراً.

طبيعي عندئذ أن نعرف المسافة بالدستور.

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\, dt \quad (3)$$

من الواضح ان مسلمات الفضاء المتري محققة في هذه الحالة ايضاً.

نحتاج احيانا الى تعريف مقربة التوابع من بعضها البعض ليس بواسطة. تكامل فروق هذه التوابع بل بواسطة قوي لهذه الفروق، مثلا القوة p؛ يمكن اعطاء المسافة الموافقة، لذلك بالدستور:

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\, dt} \quad (4)$$

يحقق هذا التعريف من أجل $p \geqslant 1$ مسلمات الفضاء المتري. مع العلم أن التأكد من المسلمة جـ ليس يسيرا (باستثناء الحالتين البسيطتين $p=1$ وَ $p=2$)؛ لن نطيل في هذا الموضوع (راجع التمرين 15).

وهكذا يبدو تعريف الفضاء المتري مرناً بشكل يجعله يستجيب لشتى متطلبات التحليل.

32. 12 . فضاء التوابع المستمرة على فضاء متري.

أ. نرمز للفضاء المتري المؤلف من كل التوابع الحقيقية المستمرة على مجال $a \leqslant t \leqslant b$ عند تزويده بالمسافة المعرفة بالدستور 12 .22 (1) $R^s [a, b]$ (كما هو الشأن في 12 .31 ـ ع حيث ظهر بصفته فضاء شعاعياً).

ب. هل يمكن تعويض المجال $[a, b]$ في هذا التعريف بأي فضاء متري؟

إن التوابع المستمرة على فضاء متري كيفي M ليست بالضرورة محدودة وعليه فإن الدستور 12 .22 (1) الوارد بشأن المسافة لم يعد صالحا. الاّ اننا لا نستطيع إنشاء فضاء تابعي الاّ بالتوابع المستمرة والمحدودة، ولذا يمكن الاحتفاظ بالدستور 12 .22 (1) شريطة استبدال max بـ sup . في الختام نعرف الفضاء R^s (M) على انه الفضاء المؤلف من كل التوابع الحقيقية المستمرة والمحدودة على فضاء متري M ، المزود بالمسافة.

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in M} |x(t) - y(t)| \qquad (1)$$

بين التابعين $x(t)$ وَ $y(t)$.

ج. نعوض هنا، ايضا، المستقيم العددي (ساحة قيم التوابع المعتبرة بفضاء متري كيفي P ، فنصل الى الفضاء P^s (M) المؤلف من كل التوابع المستمرة والمحدودة على فضاء متري M ، قيمها في فضاء متري P ، نزود هذا الفضاء بالمسافة: $\rho(x, y) = \sup_{t \in M} \rho_M \{x(t), y(t)\}$

بين التابعين $x(t)$ وَ $y(t)$.

ندرس في البنود الموالية من هذه الفقرة بعض المفاهي العامة لنظرية الفضاءات المترية بالنسبة للفضاء P^s (M) ولحالاته الخاصة.

د . ينتج من التعريف (2) أن تقارب متتالية $x_n(t)$ نحو النهاية $x(t)$ في الفضاء $P^s(M)$ يكافيء التقارب المنتظم على M (39. 5) لمتتالية التوابع $x_n(t)$ نحو تابع النهاية $x(t)$.

ر . اتفقنا على تسمية كل مجموعة E في فضاء متري P ، مجموعة كثيفة اينما كان بالنسبة لمجموعة $F \subset P$ إن كانت كل نقطة $x \in F$ تنتمي الى E أو تساوي نهاية متتالية من E (16. 3). إذا كان لدينا زيادة على ذلك، $E \subset F$ قلنا ان E كثيفة اينما كان في F . نقول عن فضاء متري P إنه قابل للفصل إذا وجدت مجوعة قابلة للعد $E \subset P$ كثيفة اينما كان في P .

لنثبت أن الفضاء $R^s[a, b]$ قابل للبفصل.

يمكن ان تكون مجموعة E قابلة للعد وكثيفة اينما كان في $R^s[a, b]$ مؤلفة مثلا من كل التوابع المضلعية التي رؤوسها في النقاط:

$$(a, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (b, y_n)$$ ،

حيث $x_j \in (a, b)$ والاعداد x_j ، y_j ناطقة. تنتج قابلية العد لهذه المجموعة من 53. 2 . لنثبت ان المجموعة E كثيفة في $R^s[a, b]$. ليكن $f(x) \in R^s[a, b]$ تابعا كيفيا وَ $\varepsilon > 0$. نبحث نبحث عن $\delta > 0$ بحيث $|x' - x''| < \delta$ يستلزم $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/5$. لتكن $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ تجزئة للمجال $[a, b]$ بواسطة النقاط الناطقة x_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ وليكن $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < \delta$. نفرض بعد ذلك ان الاعداد الناطقة $y_0, y_1, \ldots, y_n$ تحقق $|y_j - f(x_j)| < \varepsilon/5$ ، $j = 0, 1, \ldots, n$. نعتبر تابعا مضلعياً $y(x)$ رؤوسه المتوالية (x_j, y_j) . عندئذ $\rho(y, f) < \varepsilon$. ذلك اننا نستطيع من اجل كل $x \in [a, b]$ ايجاد x_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ بحيث $|x - x_j| < \delta$ حينئذ $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon/5$

و $|f(x_{j\pm1}) - f(x_j)| < \varepsilon/5$

ينتج من ذلك:

$$|y_j - y_{j\pm1}| \leqslant |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_{j\pm1})| + |f(x_{j\pm1}) - y_{j\pm1}| < \frac{3}{5}\varepsilon$$

إذن لدينا من اجل $x \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ $|y(x) - y_j| < 3\varepsilon/5$. اخيراً:

$$|y(x)-f(x)| \leqslant |y(x)-y_j| + |y_j - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| <$$
$$< \frac{3}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon,$$
$$\rho(y, f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

يمكننا البرهان على أن الفضاء $R^s[0, \infty)$ المؤلف من كل التوابع المحدودة والمستمرة على نصف المستقيم $0 \leqslant x < \infty$ لا يقبل أي جزء قابل للعد كثيف اينما كان (راجع التمرين 2).

س. نقول عن فضاء متري P إنه تام (17.3 ـ د) إذا تحقق فيه مقياس كوشي: كل متتالية كوشية $x_1, x_2, \ldots$ من P تقبل نهاية في P .

نظرية. إن الفضاء $P^s(M)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة والمحدودة على فضاء متري M ، ذات القيم في فضاء متري تام P (راجع جـ)، فضاء تام.

البرهان. نرمز بـ ρ لمسافة الفضاء P وبـ:

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho_P\{x(t), y(t)\}$$

لمسافة الفضاء $P^s(M)$.

لتكن $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots$ متتالية كوشية مؤلفة من توابع هي عناصر من الفضاء $P^s(M)$: من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد N طبيعي بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل $n \geqslant N$، $m \geqslant N$:

$$\rho(x_n, x_m) = \sup_t \rho_P\{x_n(t), x_m(t)\} \leqslant \varepsilon \qquad (3)$$

من ذلك ينتج ان كل متتالية $x_n(t_0) \in P$ التي نحصل عليها بتثبيت $t = t_0$ متتالية كوشيه؛ بما ان الفضاء P تام فإنه توجد قيمة:

$$x(t_0) = \lim_{n \to \infty} x_n(t_0) \in P$$

إذا رسمت $t = t_0$ كل M فإننا نصل الى تابع النهاية.

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$$

لنجعل $m \to \infty$ بدون تغيير n في المتراجحة:

$$\rho_P \{x_n (t),\ x_m (t)\} \leqslant \varepsilon$$

القائمة من اجل كل t و $n \geqslant N$، $m \geqslant N$؛ نحصل عندئذ بفضل 21.5 ـ ب، على:

$$\rho_P \{x_n (t),\ x (t)\} \leqslant \varepsilon \qquad (4)$$

وذلك من اجل كل t وكل $n \geqslant N$. يعني ذلك ان متتالية، التوابع $x_n (t)$ متقاربة نحو النهاية $x (t)$ بانتظام على M. يتبين من النظريتين 49.5 و 59.5 ان التابع $x (t)$ محدود ومستمر وهو بالتالي عنصر من الفضاء $P^s (M)$، يمكن كتابة المتراجحة (4) على الشكل:

$$\rho (x_n, x) \leqslant \varepsilon$$

وهذا يعني أن $X=X(t)$ نهاية لمتتالية العناصر Xn. انتهى البرهان.

42.12 . نظرية آرزيلا Arzelà . قلنا ان فضاء متريا P متراص (19.3 ـ أ) إن كانت كل متتالية من نقاطه $x_1, x_2, \ldots$ تحوي متتالية جزئية $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$ متقاربة، وشبه متراصة (39.3 ـ أ) إن كانت كل متتالية $x_1, x_2, \ldots$ تحوي متتالية جزئية لكوشي $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots$.

أ. ليكن Q فضاء متريا متراصا و P فضاء متريا كيفيا و $P^s (Q)$ الفضاء المتري المؤلف من كل التوابع المستمرة $x = x (t)$ المعرفة على Q والتي تأخذ قيمها في P المزود بالمسافة 32.12 (2).

$$\rho (x, y) = \sup_t \rho_P \{x (t),\ y (t)\}.$$

إن الفضاء $P^s (Q)$ ليس عموما متراصا. ما هي الشروط التي تجعل مجموعة جزئية $E \subset P^s (Q)$ متراصة؟

للإجابة عن هذا السؤال ندخل التعرفين التاليين:

تعريف 1 . نقول عن مجموعة E مؤلفة من توابع $x (t) \in P^s (Q)$ بانها ذات قيم متراصة (شبه متراصة) بانتظام إذا وجدت مجموعة متراصة (شبه متراصة) $P \supset P_0$ تحوي كل قيم التوابع $x (t)$ من اجل $t \in Q$، $x \in E$.

تعريف 2 . نقول عن مجموعة E مؤلفة من توابع $x(t) \in P^s(Q)$ إنها مساوية للاستمرار إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta > 0$ بحيث تؤدي المتراجحة: $\rho_Q(t', t'') < \delta$ الى المتراجحة:

$\rho_P\{x(t'), x(t'')\} < \varepsilon$

وذلك مهما كان التابع $x(t) \in E$.

نظرية (آرزيلا) . لكي تكون مجموعة $E \subset P^s(Q)$ شبه متراصة يلزم ويكفي ان تكون ذات قيم شبه متراصة بانتظام ومتساوية الاستمرار .

البرهان . نفرض ان $E \subset P^s(Q)$ شبه متراص. بفضل مقياس هوسدورف (39.3 ـ ج) نستطيع ، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، ايجاد في E $\varepsilon/3$ ـ شبكة منتهية أي مجموعة منتهية $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ من التوابع بحيث يمكن من اجل كل $x(t) \in E$ ايجاد رقم k ، $1 \leqslant k \leqslant m$ يحقق :

$$\rho_P[x(t), x_k(t)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

نبحث من اجل نفس العدد ε عن $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحات :

$$\rho_P[x_k(t'), x_k(t'')] < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

من اجل : $\rho_Q(t', t'') < \delta$. باعتبار نفس العنصرين t' وَ t'' نجد عندئذ ، من اجل كل $x(t) \in E$ ومن اجل $x_k(t)$ الموافقة له ، ان :

$$\rho_P[x(t'), x(t'')] \leqslant \rho_P[x(t'), x_k(t')] + \rho_P[x_k(t'), x_k(t'')] + \\ + \rho_P[x_k(t''), x(t'')] < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

أي ان الجماعة E متساوية الاستمرار .

إن المجموعة P_k المؤلفة من كل قيم التابع $x_k(t)$ المستمر على المتراص Q مجموعة متراصة مهما كان $k = 1, \ldots, m$ (61.5 ـ أ) . ثم إن الاتحاد R للمجموعات المتراصة $P_1, \ldots, P_m$ هي بطبيعة الحال متراصة ايضا . تثبت المتراجحة (1) ان المجموعة R تمثل $\varepsilon/3$ ـ شبكة للمجموعة

$\bar{P}_0 \subset P$ المؤلفة من كل قيم التوابع $x(t) \in E$ على Q . بما أن المجموعة P_0 شبه متراصة بفضل 59.3 فإن E ذات قيم شبه متراصة بانتظام.

وبذلك نرى ان شروط نظرية ارزيلا ضرورية لشبه تراص E . لنثبت كفاية هذه الشروط.

إن الفضاء $P^s(Q)$ منغمس ايزومترياً في الفضاء $P(Q)$ المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المحدودة (مستمرة كانت أو غير مستمرة) على Q والمزود بالمسافة:

$$\rho(x, y) = \sup_t \rho_P \{x(t), y(t)\}.$$

يتبين من مقياس هو سدورف (39.3 ـ ج) اننا ننهي برهان النظرية بإنشاء، انطلاقا من افتراضات النظرية، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ε ـ شبكة منتهية للمجموعة E ، في الفضاء $P(Q)$. نفرض ان $E \subset P^s(Q)$ ذات قيم شبه متراصة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، نبحث عن ايجاد $\delta > 0$ انطلاقا من شرط تساوي الاستمرار للجماعة E . نغطي بعد ذلك المتراص Q بعدد منته من الكرات اقطارها δ . يمكن الحصول، بازالة النقاط الفائضة، على تغطية المتراص Q بعدد منته من المجموعات، اقطارها $\leqslant \delta$ ، وغير متقاطعة مثنى مثنى. نرمز لهذه المجموعات بـ $Q_1, \ldots, Q_m$. لتكن بعد هذا: $p_1, \ldots, p_k$ $\varepsilon/2$ ـ شبكة منتهية في P لشبه المتراص P_0 الذي يحوي كل قيم التوابع $x(t)$ من اجل $t \in Q, x \in E$. نعتبر المجموعة G المؤلفة من التوابع $(t) \in P(Q)$ التي تأخذ على $Q_1, \ldots, Q_m$ القيم الثابتة $p_1, \ldots, p_k$. من البديهي ان عدد هذه التوابع منته (لا يتجاوز k^m) وهي من جهة اخرى تشكل ε ـ شبكة للمجموعة E . لرؤية ذلك نعتبر تابعا كيفياً $x_0(t)$ من E . إن تغيّر هذا التابع على المجموعة Q_j التي لها قطر $\leqslant \delta$ ، لا يتجاوز $\varepsilon/2$ وتوجد نقطة p_j من مجموعة النقاط $p_1, \ldots, p_m$ تبعد عن كل قيم $x_0(t)$ ، من اجل $t \in Q_j$ ، بمسافة ،

لا تتجاوز ε . ثم إن التابع $x(t) \in P(Q)$ الذي يأخذ على كل Q_j القيمة الموافقة له p_j ينتمي الى G_ε ولدينا ، بطبيعة الحال ، في الفضاء $P^s(Q)$:

$$\rho(x_0, x) = \sup \rho_P[x_0(t), x(t)] \leqslant \varepsilon.$$

انتهى برهان النظرية.

ب. إذا كان P فضاء تاما فإن الامر كذلك فيما يخص $P^s(M)$ (32.12). إن ملاصق كل مجموعة شبه متراصة في فضاء تام مجموعة متراصة (69.3 ـ ب). وبالتالي فإن الاجزاء المتراصة في $P^s(M)$ تتميز في الحالة الراهنة كالتالي:

إنها المجموعات الجزئية المغلقة من $P^s(M)$ ذات القيم المتراصة بانتظام والمتساوية الاستمرار.

جـ. في الحالة التي يكون فيها P الفضاء الاقليدي ذي n بعداً R_n ، فإن صف المجموعات شبه المتراصة مطابق لصف المجموعات المحدودة (39.3 ـ ب، 49.3). إذن فمعنى القول ان جماعة E مؤلفة من توابع $x(t) \in R_n^s(M)$ ذات قيم شبه متراصة بانتظام هو، في الحالة المعتبرة، وجود ثابت B يحقق $\sup|x(t)| \leqslant B$ من اجل كل $t \in M$ وَ $x(t) \in E$. تسمى مثل هذه الجماعة جماعة توابع محدودة بانتظام. وهكذا ندرك الشكل الذي تأخذه نظرية ارزيلا في الحالة التي يكون فيها $P = R_n$ وهو:

تكون مجموعة E من التوابع $x(t) \in R_n^s(M)$ شبه متراصة إذا وفقط إذا كانت محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار.

د. فيما يخص التوابع العددية على مجال مغلق من المستقيم العددي يمكننا الاشارة الى شرط بسيط يضمن شبه التراص:

نظرية. إذا كانت E مجموعة توابع عددية $x(t)$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على مجال $a \leqslant t \leqslant b$ ووجد ثابتان a_0, a_1 . بحيث تتحقق

المتراجحتان: $|x(t)| \leqslant a_0, \quad |x'(t)| \leqslant a_1$

من اجل كل $x(t) \in E$، فإن المجموعة E شبه متراصة في الفضاء $R^s[a, b]$.

البرهان. بتطبيق دستور لاغرانج 7 .44 نحصل على المتراجحة:

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant \sup |x'(t)| \cdot |t'' - t'| \leqslant a_1 |t'' - t'|,$$

التي تثبت ان الجماعة E متساوية الاستمرار. ثم ننهي البرهان بتطبيق النظرية جـ نظرا لكون الجماعة المعتبرة محدودة بانتظام فرضاً.

12 .52 . فضاء التوابع القابلة للإشتقاق باستمرار m مرة.

أ. نرمز للفضاء المتري المؤلف من كل التوابع الحقيقية $x(t)$ المستمرة والقابلة للإشتقاق باستمرار m مرة على مجال $a \leqslant t \leqslant b$ المزود بالمسافة المعرفة بالدستور 12 .22(2):

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t) - y^{(m)}(t)|\}$$

نرمز له بـ $D_m(a, b)$؛ بصفة خاصة $D_0(a, b) = R^s(a, b)$، يعني تقارب متتالية $x_n(t)$ نحو النهاية $x(t)$، في الفضاء $D_m(a, b)$، تقارب $m + 1$ متتالية:

$$x_n(t) \to x(t), \; x'_n(t) \to x'(t), \; \ldots, \; x_n^{(m)}(t) \to x^{(m)}(t).$$

ب. لنثبت ان الفضاء $D_m(a, b)$ تام. لتكن $x_1(t), x_2(t), \ldots$ متتالية كوشيه من توابع منتمية للفضاء $D_m(a, b)$. ينتج من المتراجحة:

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)| \leqslant \rho(x_n, x_p)$$

ان كل متتالية من المتتاليات:

$$\{x_n(t)\}, \quad \{x'_n(t)\}, \; \ldots, \; \{x_n^{(m)}(t)\}$$

متتالية كوشيه بالنسبة لمسافة الفضاء $R^s(a, b)$. بما أن الفضاء $R^s(a, b)$ تام (12 .32 ـ س) فإن كل متتالية $x_n^{(k)}(t)$ متقاربة بانتظام، لما $n \to \infty$ نحو تابع مستمر $y_k(t)$ (حيث $k = 0, 1, \ldots, m$).

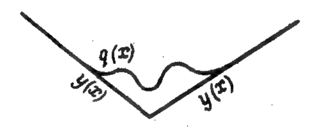
ينتج من النظرية 77.9 حول اشتقاق متتالية توابع ان لدينا:

$$y_1(t) = \lim_{n\to\infty} x'_n(t) = (\lim_{n\to\infty} x_n(t))' = y'_0(t),$$
$$y_2(t) = y'_1(t) = y''_0(t), \quad \ldots, \quad y_m(t) = y_0^{(m)}(t)$$

وبالتالي فإن التابع $y_0(t)$ ينتمي الى الفضاء $D_m(a, b)$. بالاعتماد ايضا على التقارب المنتظم لكل متتالية $x_n^{(k)}(t)$ نحو $y_k(t) = y_0^{(k)}(t)$ لما $n \to \infty$. نلاحظ ان التابع $y_0(t)$ تساوي نهاية المتتالية $x_n(t)$ بالنسبة لمسافة الفضاء $D_m(a, b)$ ، وهو المطلوب.

جـ . لنثبت ان الفضاء $D_m(a, b)$ كثيف اينما كان في $R^s(a, b)$ (بالنسبة لمسافة $R^s(a, b)$ ، طبعاً). بما أن خاصية الكثافة اينما كان خاصية متعدية (أو انتقالية) (انظر 26.3) يكفي البرهان على أن $D_m(a, b)$ كثيف اينما كان بالنسبة للمجموعة ≻ المؤلفة من التوابع المضلعية (رأينا في 32.12 ـ ر أن ≻ كثيفة اينما كان في $R^s(a, b)$) .

يمكن جعل كل تابع مضلعي $y(x)$ « مرناً » بتعويضه في جوار كل زاوية بتابع $q(x)$ يقبل الاشتقاق باستمرار m مرة وقيم مشتقاته عند نقاط تماس اضلاع المضلع تساوي قيم المشتقات الموافقة لها للتابع $y(x)$ (الرسم 1.12). يمكن انشاء مثل هذا التابع $q(x)$ مثلا في شكل مضلع درجته $2m$ (راجع 91.12 ـ د). باجراء تشابه مركزه يقع في رأس الزاوية ونسبته صغيرة بكفاية يمكننا الحصول على مسافة بين $q(x)$ و $y(x)$ صغيرة بالقدر الذي نريد.



الرسم 1.12

62.12 . فضاء التوابع المستمرة المزود بالمسافة التكاملية.

أ. نرمز بـ $L^s(a, b)$ للفضاء المتري المؤلف من كل التوابع المستمرة الحقيقية $x(t)$ على مجال مغلق $[a, b]$ ، عند تزويده بالمسافة

:(3)22.12

$$(1) \qquad \rho(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

ونرمز للفضاء المؤلف من نفس التوابع، عند تزويده بالمسافة.

$$(2) \qquad \rho(x, y)=\sqrt[p]{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt} \quad (p>1)$$

بالرمز $L_p^s(a, b)$.

كنا اعتبرنا أيضا على فضاء التوابع المستمرة المسافة:

$$\rho(x, y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-y(t)|.$$

تولد المسافات السابقة (1)، (2)، (3) انماطا جد مختلفة من التقاربات وهكذا فإن متتالية التوابع $x_n(t)$ المبينة في الرسم 2.12 لا تتقارب نحو الصفر في الفضاء $R^s(0, 1)$ في حين انها متقاربة نحو الصفر في كل فضاء $L_p^s(0, 1)$ لأن:

$$\int_0^1 x_n^p(t)\,dt=\int_0^{1/n} x_n^p(t)\,dt\leqslant\frac{1}{n}.$$

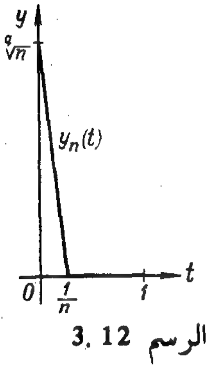
ثم إن متتالية التوابع $y_n(t)$ المبينة في الرسم 3.12 متقاربة نحو الصفر في كل فضاء $L_p^s(0, 1)$ بحيث $p<q$ وهي ليست كذلك في $L_q^s(0, 1)$ لأن:

$$\int_0^1 y_n^p(t)\,dt=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{n}\,n^{\frac{p}{q}}=\frac{1}{p+1}\,n^{\frac{p}{q}-1}\begin{cases}\to 0 & \text{pour} \quad p<q, \\ =\frac{1}{p+1} & \text{pour} \quad p=q.\end{cases}$$

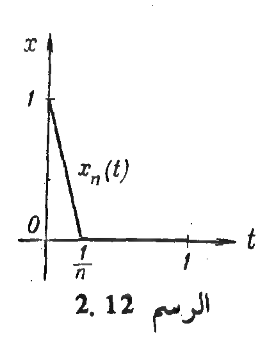
ب. إن الفضاء $L_p^s(a, b)$ ليس تاما وذلك مهما كان $p\geqslant 1$. للبرهان على هذه القضية نعتبر متتالية توابع مستمرة $y_\nu(x)$ محصورة بين 0 و 1 ومتقاربة، لما $\nu\to\infty$، نحو 0 بانتظام على كل مجال $(a, c-\varepsilon)$، ونحو 1 على كل مجال $(c+\varepsilon, b)$ [النقطة c نقطة مثبتة بين a و b]. تحقق هذه المتتالية مقياس كوشي في الفضاء $L_p^s(a, b)$. ذلك ان لدينا:

$$\int_a^b |y_\nu(x)-y_\mu(x)|^p\,dx=\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}+\int_{c+\varepsilon}^b\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon$$

وهذا من اجل ν و μ كبيرين. لنثبت أن المتتالية $y_\nu(x)$ غير متقاربة، وفق مسافة $L_p^s(a, b)$ ، نحو تابع مستمر.



الرسم 3. 12



الرسم 2. 12

نورد في هذا السياق الملاحظة التالية. إذا تقاربت متتالية توابع $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ بالنسبة لمسافة $L_p^s(a, b)$، نحو تابع مستمر $f(x)$ على مجال $\Delta = \{a \leqslant x \leqslant b\}$ وتقاربت بانتظام على مجال $\delta = \{c \leqslant x \leqslant d\}$ داخل Δ نحو تابع $\varphi(x)$ فإن المتطابقة $\varphi(x) \equiv f(x)$ صحيحة في المجال δ . ذلك ان لدينا في الفضاء $L_p^s(c, d)$، العلاقتين:

$$\rho^p(f_\nu, \varphi) = \int_c^d |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p\, dx \leqslant \max_{x \in \delta} |f_\nu(x) - \varphi(x)|^p (d - c) \to 0.$$

$$\rho^p(f_\nu, f) = \int_c^d |f_\nu(x) - f(x)|^p\, dx \leqslant \int_a^b |f_\nu(x) - f(x)|^p\, dx \to 0$$

ومنه يأتي بفضل وحدانية النهاية (33. 3 ـ أ) : $f(x) \equiv \varphi(x)$.

إن الفرض القائل ان المتتالية $y_n(x)$، $y_2(x)$، المنشأة اعلاه متقاربة، بالنسبة لمسافة $L_p^s(a, b)$ ، نحو تابع مستمر $f(x)$ يؤدي حسب ما رأينا، الى $f(x) = 0$ من اجل $a \leqslant x < c$ و $f(x) = 1$ من اجل $c < x \leqslant b$. لكن التابع $f(x)$ لا يستطيع، في هذه الحالة ان يكون مستمراً على المجال $a \leqslant x \leqslant b$ مهما كانت القيمة $f(c)$.

ج . يقبل الفضاء $L_p^s(a, b)$، حسب النظرية العامة 18. 3 ، التتمة $\overline{L}_p^s(a, b)$. من الطبيعي أن نطرح السؤال التالي: هل يمكن اعطاء

عناصر الفضاء $\overline{L}_p^s(a, b)$، المعرفة حسب النظرية 18.3 ـ أ بطريقة مجردة، معنى اقل تجريداً وذلك بتفسيرها، مثلا، على انها توابع؛ الجواب عن هذا السؤال هو نعم مع الملاحظة أن هذه المسألة ليست بالامر الهين (راجع مثلا [16]).

§ 12 .3 . الفضاءات الشعاعية النظيمية

12 .13 . نريد تزويد فضاء شعاع R بمسافة؛ إنه من الطبيعي بهذا الخصوص ان نسلم بأن المسافة والعمليتين الخطيتين مرتبطتان بشكل يجعل إنسحاب نقطتين من نفس الشعاع لا يغير المسافة بينهما. ولذا يكفي تعريف المسافة بين كل نقطة (شعاع) ونقطة مثبتة، الصفر مثلا. إذن يكفي ان نصل كل نقطة $x \in R$ بعدد، وهو يمثل المسافة بين x وَ 0؛ يسمى هذا العدد **نظيم** الشعاع x.

نقول عن فضاء شعاعي R إنه فضاء حقيقي **نظيمي** إذا تمكنا من ايصال كل شعاع $x \in R$ بعدد $|x|$ (رمز له احيانا بـِ $\|x\|$ أو $|||x|||$) يسمى **نظيم** الشعاع x يتمتع بالخاصيات التالية:

أ. $|x| > 0$ **إن كان** $x \neq 0$ ؛ $|0| = 0$.

ب. $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ **من أجل كل** $x \in R$ **وكل عدد حقيقي** α.

ج. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ من اجل كل x وَ y في R (مسلمة المثلث).

نضع تعريفا $\rho(x, y) = |x - y|$. من السهل اثبات ان مسلمات الفضاء المتري محققة (نترك البرهان للقارىء)؛ ينتج من ذلك أن كل فضاء نظيمي فضاء متري وهكذا نستطيع في فضاء نظيمي قياسي المسافات بين الاشعة واستخدام الانتقال الى النهاية: نقول عن فضاء نظيمي تام إنه **فضاء لباناخ** (أو باناخي). نقول عن فضاء شعاعي غير مزود بنظيم (أو بمسافة) إنه **فضاء تآلفي**.

12 .23 . أ . إن الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل الفضاءات الحقيقية $x(t)$ المستمرة والمحددة على فضاء متري M ، وهو الفضاء الذي اعتبرناه كمثال لفضاء شعاعي (12 .31 ـ ع) ولفضاء متري (12 .32 ـ ب) يمثل في نفس الوقت مصدراً هاما للفضاءات النظيبية. يُعطي نظيم في $R^s(M)$ بالدستور . .

$$(1) \quad \| x \| = \sup_t | x(t) |.$$

نرمز هنا لنظيم تابع $x(t)$ بـ $\| x \|$ بدل $| x |$، وذلك لإبداء الفرق بين نظيم التابع $x(t)$ بصفته عنصرا من الفضاء $R^s(M)$ وبين قيمته المطلقة المتعلقة بـ t . إن المسلمات 12 .13 أ ـ حـ التي تعرف النظيم بديهية في هذه الحالة. بصفة خاصة نتأكد من مسلمة المثلث كالتالي :

$$| x(t) + y(t) | \leqslant | x(t) | + | y(t) | \leqslant$$
$$\leqslant \sup_t | x(t) | + \sup | y(t) | = \| x \| + \| y \|;$$

ثم نعتبر الحد الاعلى في الطرف الايسر فنحصل على المتراجحة المطلوبة :

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$$

ب . نعمم الآن المثال a بأن نعوض فيه الحقل R للأعداد الحقيقية بفضاء حقيقي نظيمي كيفي R . وهكذا فإن عناصر الفضاء الجديد $R^s(M)$ هي التوابع المستمرة والمحدودة $x(t)$ المعرفة على الفضاء المتري M ذات القيم في الفضاء النظيمي R .

من الضروري ان نثبت بأن العمليتين الخطيتين على مثل هذه التوابع تؤديان الى توابع من نفس النمط. إذا كان التابعان $x(t)$ وَ $y(t)$ يأخذان قيمها في R وكان محدودين وَ :

$$X = \sup_t | x(t) |, \quad Y = \sup_t | y(t) |;$$

فإن التابع : $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ محدود ايضا من اجل كل α و β حقيقيين لأن

$$| \alpha x(t) + \beta y(t) | \leqslant | \alpha | | x(t) | + | \beta | | y(t) | \leqslant$$
$$\leqslant | \alpha | X + | \beta | Y$$

وهذا من اجل كل t .

لنثبت ان التابع $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ مستمر من اجل $t = t_0$ كما هو الحال بالنسبة للتابعين $x(t)$ وَ $y(t)$. يمكن افتراض $\alpha \neq 0$ وَ $\beta \neq 0$. نثبّت عددا $\varepsilon > 0$ ونختار $\delta > 0$ بحيث تؤدي المتراجحة $\rho(t, t_0) < \delta$ الى

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \quad |y(t) - y(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$$

لدينا في هذه الحالة:

$$|z(t) - z(t_0)| \leqslant |\alpha| |x(t) - x(t_0)| + |\beta| |y(t) - y(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

وهذا يثبت استمرار التابع: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$ من اجل $t = t_0$.

ندخل في الفضاء $R^s(M)$ النظيم بالدستور (1)، حيث يرمز $|x(t)|$ بالطبع للنظيم في الفضاء R .

إذن فإننا شيدنا الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المستمرة والمحدودة على الفضاء المتري M تأخذ قيمها في الفضاء النظيمي R .

نشير الى ان الفضاء $R^s(M)$ يصبح تاما إن كان الفضاء R كذلك (32.12 ـ س)

33.12 . امثلة اخرى في الفضاءات النظيمية.

أ . نستطيع ادخال نظيم على الفضاء المتري $D_m(a, b)$ (52.12) بوضع:

$$\|x\| = \max\{|x(t)|, |x'(t)|, \ldots, |x^{(m)}(t)|\}. \quad (1)$$

من السهل التأكد من سمسلمات النظيم 13.12 أ ـ ج .

ب . نستطيع ادخال نظيمات على الفضاءات المترية $L_p^s(a, b)$ (62.12) وذلك بوضع.

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt} \quad (p \geqslant 1). \quad (2)$$

من السهل التأكد من مسلمات النظيم 13.12 أ ـ ج من اجل $p = 1$ ، اما في الحالة العامة $(p > 1)$ فإن التأكد من مسلمة المثلث تتطلب بعض الصبر (راجع التمرين 15).

ج. تقبل الفضاءات النظيمية $L_p^s(a, b)$ ، $R^s(a, b)$ فضاءات مماثلة هامة في حالة البعد المنتهي. ليكن R_n الفضاء ذي n بعداً المؤلف من الاشعة $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ندخل عليه النظيمات التالية:

$$(3)\ |x|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|,$$

$$(4)\ |x|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} \quad (p > 1),$$

$$(5)\ |x|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|.$$

من لبديهي ان النظيم الاقليدي:

$$(6)\ |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}$$

الذي نعرفه منذ 86.2 حالة خاصة من النظيم $|x|_p$ الموافق لـ $p = 2$.

إن التنظيمين (3) وَ (4) مماثلان للنظيمين التكـامليـن في الفضـاءيـن $L_1^s(a, b)$ وَ $L_p^s(a, b)$. اما النظيم (5) فهو مماثل للنظيم 23.12 (1) في الفضاء $R^s(a, b)$ ؛ إن ما يبرر الرمز $|x|_\infty$ هي العلاقة الخاصة بالنهاية:

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p}$$

(راجع التمرين 9 من الفصل 4).

كنا، في الحالة (6)، قد تأكدنا من مسلمات النظيم في 86.2 . أما في الحالتين (3) وَ (5) فإن ذلك يتم بدون صعوبة تذكرز. تبقى الحالة (4) التي لا يعتبر التأكد منها امرا بسيطا (راجع التمرين 17).

خلافا للنظيمات في فضاء تابعي، فإن النظيمات (3) ـ (6) متكافئة من وجهة نظـر التقـارب الذي تـولـده: لما $m \to \infty$، فـإن تقــارب متتــاليــة اشعــة

من اجل أي نظيم من النظيمات $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ نحو شعاع $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

(3) ـ (5) تعني تقارب n متتالية عددية : $\xi_1^{(m)} \to \xi_1, \ldots, \xi_n^{(m)} \to \xi_n$

سنواصل دراسة النظيمات في فضاءات ذات ابعاد منتهية في 12 .63 .

د . إذا عوضنا في الامثلة السابقة n بـ ∞ فإننا نحصل على مجموعة هامة من الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية. لنرمز، بصفة خاصة، بـ l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ لمجموعة كل المتتاليات العددية $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ التي تحقق: $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$. نضع $\| x \|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p}$ باستخدام متراجحة المثلث في النظيم $|x|_p$ للفضاء R_n وبوضع $x = \{\xi_k\} \in l_p$، $y = \{\eta_k\} \in l_p$، يمكن كتابة:

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p} = \| x \|_p + \| y \|_p.$$

بالانتقال الى النهاية: $n \to \infty$ في الطرف الايسر نحصل على تقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p$ وعلى:

$$\| x + y \|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p} \leqslant \| x \|_p + \| y \|_p.$$

من البديهي أن $\alpha x = \{\alpha \xi_k\}$ ينتمي الى المجموعة l_p مع $x = \{\xi_k\}$ وهذا من اجل كل α حقيقي، كما ان $\| \alpha x \|_p = |\alpha| \, \| x \|_p$. وهكذا فإن المجموعة l_p ، من اجل $p \geqslant 1$ ، فضاء شعاعي نظيمي. يمكن البرهان على ان الفضاء l_p تام مهما كان $p \geqslant 1$ (التمرين 18).

12 .43 . إن كل التعاريف وكل النظريات المتعلقة بالفضاءات التآلفية والفضاءات المترية (الخالية من بنية فضاء شعاعي) صالحة بطبيعة الحال في الفضاءات الشعاعية النظيمية. وهكذا يمكن في فضاء شعاعي نظيمي اعتبار مفهومي المجموعة المتوازنة والمجموعة المحدبة الذين يعتبران من اختصاص

نظرية الفضاءات التآلفية.

أ . نقول عن مجموعة E في فضاء شعاعي X إنها متوازنة اذا احتوت النقطة $-x$. عند احتوائها النقطة x .

ب. نقول عن مجموعة E في فضاء شعاعي X إنها محدّبة إذا احتوت النقاط : $z = \alpha x + \beta y, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1,$

عند احتوائها النقطتين x وَ y ، يعني ذلك هندسيا انها تحوي القطعة المستقيمة ذات الطرفين x وَ y. .

ج . تستعمل النظرية التالية بنية الفضاء الشعاعي وكذا النظيم أي أن ميدانها الطبيعي هو الفضاءات الشعاعية النظيمية.

نظرية. إن كل كرة $S = \{x: |x| \leqslant \rho\}$ لفضاء شعاعي نظيمي R مجموعة متوازنة ومحدبة ومغلقة.

البرهان. إذا كان $|x| \leqslant \rho$ فإن $|-x| = |x| \leqslant \rho,$ وهذا يبين أن الكرة مجموعة متوازنة. اما كونها مغلقة فينتج من 15.3 ـ ب. بخصوص خاصية التحدب نلاحظ ان مسلمة المثلث تعطي:

$$|\alpha x + \beta y| \leqslant \alpha |x| + \beta |y| \leqslant (\alpha + \beta) \rho = \rho,$$

وهذا عندما يكون $|x| \leqslant \rho$ ، $|y| \leqslant \rho$ ، $\alpha \geqslant 0$ ، $\beta \geqslant 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ ؛ وهو المطلوب.

د . إن خاصية تحدب كرة الوحدة هامة جدا حتى ان بامكانها تعويض مسلمة المثلث. لنفرض، بصفة خاصة، اننا ادخلنا في فضاء شعاعي X تابعا عدديا $|x|$ يحقق المسلمتين الاولى والثانية للنظيم ووضعنا بدل مسلمة المثلث المسلمة التالية:

الكرة $\{x \in X: |x| \leqslant 1\}$ مجموعة محدبة.

لنبرهن على أن هذه المسلمة والمسلمتين 13.12 أ، ب تستلزم

متراجحة المثلث 12 .13جـ. من كل شعاعين $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ فإن $\frac{x}{|x|}$ وَ $\frac{y}{|y|}$ ينتميان لكرة الوحدة؛ باستخدام المسلمة الجديدة نرى ان الشعاع $\frac{\alpha x}{|x|} + \frac{\beta y}{|y|}$ ينتمي ايضا لهذه الكرة في حالة $\alpha \geqslant 0$، $\beta \geqslant 0$، $\alpha + \beta = 1$:

$$\left|\alpha \frac{x}{|x|} + \beta \frac{y}{|y|}\right| \leqslant 1.$$

نضع هنا $\alpha = \frac{|x|}{|x|+|y|}$ ، $\beta = \frac{|y|}{|x|+|y|}$ ؛ باخراج $\frac{1}{|x|+|y|}$ كعامل مشتركة من النظيم وبضرب المتراجحة في $|x|+|y|$ نحصل على:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

وهو المطلوب. إن كان احد الشعاعين x ، y منعدما فإن متراجحة المثلث تصبح بديهية.

12 .53 . النظيمات المتكافئة.

أ نقول عن نظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ في نفس الفضاء الشعاعي X إنهما متكافئان (أو هوميومورفيان) إذا كانت المسافتان المولدتان عنهما هوميومورفيتين (3 .43)، اي إذا كان التقارب $x_n \to x$ وفق احد النظيمين يكافيء التقارب $x_n \to x$ وفق النظيم الآخر. وبالتالي فإن كل مجموعة مغلقة (مفتوحة) في X بالنسبة لأحد هذين النظيمين مغلقة (مفتوحة) أيضا بالنسبة للنظيم الثاني.

ب. لنر ما هي الخاصيات الهندسية للكرتين:

$$S_1(\rho) = \{x \in X : |x|_1 \leqslant \rho\}$$

$$S_2(\rho) = \{x \in X : |x|_2 \leqslant \rho\}$$

التي توافق تكافؤ النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$. كنا رأينا ان كلا من هذين الكرتين متوازنة ومحدبة ومغلقة بالنسبة للنظيم المعبر فيها.

توطئة. إذ تكافأ النظيمان $|x|_1$ وَ $|x|_2$ فإنه يوجد ثابت $c_1 > 0$ بحيث تكون كل كرة $S_1(\rho)$ محتوية الكرة $S_2(c_1\rho)$ ويوجد ثابت $c_2 > 0$ بحيث تكون كل كرة $S_2(\rho)$ محتوية الكرة $S_1(c_2\rho)$

وبالعكس، إذا وجد ثابتان c_1 وَ c_2 يتمتعان بالخاصيتين المذكورتين فإن النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئان.

البرهان. ليكن c_1 وَ c_2 ثابتين يتمتعان بالخاصيتين المذكورتين. ثم نفرض ان: $|x - x_n|_1 = \varepsilon_n \to 0$. عندئذ فإن الكرة $S_2(\varepsilon_n/c_2)$ التي تحوي $S_1(\varepsilon_n)$ تحوي ايضا العنصر $x - x_n$. بحيث أن $|x - x_n|_2 \leqslant \varepsilon_n/c_2$ يعني ذلك ان $|x - x_n|_2 \to 0$ بطريقة مماثلة ينتج من $|x - x_n|_2 \to 0$ ان $|x - x_n|_1 \to 0$.

وبالعكس، نفرض ان النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئان لكنه لا يوجد الثابت المطلوب c_1 . حينئذ نستطيع من اجل $n = 1, 2, ..$ إيجاد كرتين $S_1(\rho_n)$ ، $S_2(\rho_n/n)$ لاتحوي اولها الثانية، اي انه توجد نقطة x_n بحيث $|x_n|_2 < \rho_n/n$ ليكن $|x_n|_1 > \rho_n$. $y_n = x_n/\rho_n$ ؛ لدينا $|y_n|_1 > 1$ ، $|y_n|_2 < 1/n$ الامر الذي يجعل المتتالية y_n نحوه بالنسبة للنظيم الثاني وهو ليس كذلك فيما يخص النظيم الاول. إن هذا يناقض فرض تكافؤ النظيمين، وبالتالي يوجد ثابت c_1 . كما ان الثابت c_2 موجود، وهو المطلوب.

ج. **نتيجة.** يكون نظيمان $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئين إذا وفقط إذا وجد ثابتان c_1 وَ c_2 موجبان (تماما) بحيث تتحقق المتراجحة المضاعفة التالية من اجل كل $x \in X$:

$$c_1 |x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant \frac{|x|_1}{c_2}$$

ذلك انه تحققت المتراجحة هذه، ينتج من $|x - x_n|_1 \to 0$ أن: $|x - x_n|_2 \leqslant \frac{1}{c_2} |x - x_n|_1 \to 0$ والعكس بالعكس الامر الذي يثبت تكافؤ النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$. لنفرض الآن بأن النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئان عندئذ يتبين من التوطئة ب وجود ثابت c_2 بحيث تحوي كل كرة $S_2(\rho)$ الكرة $S_1(c_2\rho)$. ليكن $|x|_1 = a$, أي ان $x \in S_1(a)$. تحوي الكرة $S_2(a/c_2)$ الكرة $S_1(a)$ إذن

$|x|_2 \leqslant a/c_2 = |x|_1/c_2$ تثبت المتراجحة الثانية بنفس الطريقة.

د. باستطاعتنا الآن تقديم وصف هندسي لأي نظيم $|x|_2$ يكافيء نظيما ثانيا $|x|_1$ معطى.

نظرية. نفرض ان لدينا، في فضاء نظيمي R مزود بالنظيم $|x|_1$ ، مجموعة متوازنة ومحدبة ومغلقة S تحوى كرة $S_1(\rho)$ ، وهي نفسها محتواة في كرة $S_1(r)$. يوجد عندئذ نظيم $|x|_2$ يكافيء النظيم $|x|_1$ ويحقق: $S_2(1) = S$.

البرهان. نختار شعاعا كيفيا $x \neq 0$ ونعتبر نصف المستقيم x/t، $0 < t < \infty$. إن نقاط نصف المستقيم، من اجل t كبير بكفاية، تنتمي فرضا للمجموعة S، اما النقاط التي لها t صغير بكفاية فهي لا تنتمي الى S. نضع $|x|_2 = \inf \left\{t : \frac{x}{t} \in S\right\}$ وَ $|0|_2 = 0$. لنثبت ان هذا النظيم الجديد يحقق المسلمات 12 .13.أ ـ ج وكذا الشرط المفروض: $\{x : |x|_2 \leqslant 1\} = S$.

لدينا، من اجل $x \neq 0$ ، $0 < |x|_2 < \infty$ وبذلك يتحقق المسلمة الاولى ثم لدينا، من اجل $\alpha > 0$:

$$|\alpha x|_2 = \inf \left\{t : \frac{\alpha x}{t} \in S\right\} = \inf \left\{\alpha \frac{t}{\alpha} : \frac{\alpha x}{t} \in S\right\} =$$
$$= \alpha \inf \left\{\tau : \frac{x}{\tau} \in S\right\} = \alpha |x|_2.$$

بما ان المجموعة S متوازنة فمن الواضح ان $|-x|_2 = |x|_2$؛ ومنه $|\alpha x|_2 = |\alpha|\,|x|_2$ من اجل كل α حقيقي.

لنثبت الآن بأن $S = \{x : |x|_2 \leqslant 1\}$. إذا كان $x \in S$، فإن لدينا بالطبع: $|x|_2 = \inf \left\{t : \frac{x}{t} \in S\right\} \leqslant 1.$ نلاحظ بعد ذلك ان تحدب S يستلزم تحدب المجموعة S_x المؤلفة من نقاط نصف المستقيم x/t المنتمية الى S؛ وبالتالي فإن المجموعة S_x تحوي كل النقاط x/t المحققة لـ $t > \inf \left\{\tau : \frac{x}{\tau} \in S\right\}$ ؛ بما أن S مغلق فإن النقطة x/t المحققة لـ $t = \inf \left\{\tau : \frac{x}{\tau} \in S\right\}$ تنتمي ايضا الى S . إذن،

إن كان $|x|_2 = \inf\left\{\tau : \frac{x}{\tau} \in S\right\} \leqslant 1$ فإن $x = x/1$ ينتمي الى S ، وهو المطلوب.

فيما يخص متراجحة المثلث المتعلقة بالنظيم $|x|_2$. وانها تنتج من 43.12 ـ د لأن الكرة $\{x : |x|_2 \leqslant 1\}$

$|x|_2$ و $|x|_1$. ينتج ذلك من التوطئة ب، ذلك أن علاقة الاحتواء : (r) $S_1(p) \subset S = S_2(1) \subset S_1(r)$ ينجم عنها :

$S_1(pP) \subset S_2(p) \subset S_1(rp)$ من اجل كل $O<P$. بما أن فرض التوطئة ب متوفر باعتبار $c_1 = 1/r$ و $C_2 = 1$ ؛ بتطبيق التوطئة نرى أن النظيمين $|x|_2$ و $|x|_1$ و $C_2 = P$ متكافئان.

ر. النظيمات في الفضاءات ذات الابعاد المنتهية. لنثبت أن كل النظيمات، في فضاء شعاعي R_n ذي بعد منته، متكافئة.

بما أن علاقة تكافؤ النظيمات علاقة متعدية فإنه يكفي البرهان على أن كل نظيم $|x|_1$ يكافيء النظيم الاقليدي $\sqrt{\sum_1^n \xi_j^2} = |x|_2$ حيث تمثل الاعداد $\xi_1, \ldots, \xi_n$ احداثيات الشعاع x ضمن أساس $e_1, \ldots, e_n$.

نضع $c_1 = \sum_1^n |e_k|_1$ ؛ لدينا من اجل كل $x \in R_n$، المتراجحة:

$$|x|_1 = \left|\sum_1^n \xi_k e_k\right|_1 \leqslant \sum_1^n |\xi_k|\,|e_k|_1 \leqslant |x|_2 \sum_1^n |e_k|_1 \leqslant c_1 |x|_2. \quad (1)$$

لنثبت ان هناك أيضا ثابتاً c_2 يحقق المتراجحة:

$$|x|_1 \geqslant c_2 |x|_2. \quad (2)$$

مهما كان $x \in R_n$. لبلوغ ذلك نفرض ان العكس صحيح: توجد متتالية اشعة $(m = 1, 2, \ldots)$ تحقق $|x_m|_1 < \frac{1}{m}|x_m|_2$. نضع: $y_m = \frac{x_m}{|x_m|_2} = (\eta_1^{(m)}, \ldots, \eta_n^{(m)})$. لدينا $|y_m|_2^2 = \sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1$ ؛ ومنه $|\eta_k^{(m)}| \leqslant 1$ من اجل كل k و m . بما أن الكرة الاقليدية مجموعة متراصة (69.3 ـ ر) فإن المتتالية $y_m\ (m = 1, 2, \ldots)$ تحوي متتالية جزئية متقاربة؛ نرمي بالاشعة الفائضة ونغيرّ الترقيم فنتمكن حينئذ من

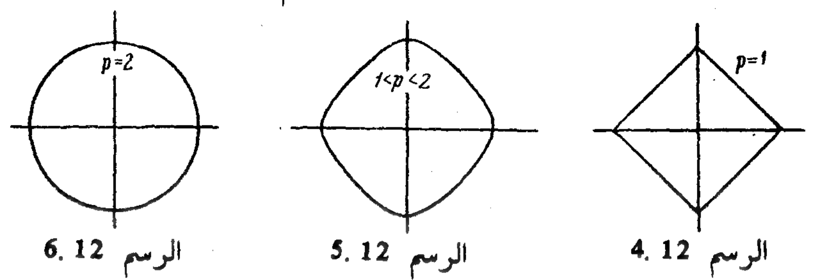
القول أن المتتالية $y_m = (\eta_1^{(m)}, \ldots, \eta_n^{(m)})$ هي نفسها متقاربة نحو شعاع $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. عندئذ نجد، حسب 23.3 ـ س، ان:

$$\eta_1 = \lim_{m\to\infty} \eta_1^{(m)}, \quad \ldots, \quad \eta_n = \lim_{m\to\infty} \eta_n^{(m)}. \qquad (3)$$

بالإنتقال الى النهاية في المساواة $\sum_1^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1,$ بجعل m يسعى الى ∞، نحصل على $|y|_2^2 = \sum_1^n \eta_k^2 = 1$ ، ومنه يأتي $y \neq 0.$ نعتمد على (1) ونلاحظ أن $|y - y_m|_1 \leqslant c_1 |y - y_m|_2 \to 0$ ، اي ان $y_m \to y$ من اجل النظيم $|x|_1$. الا أن: $|y_m|_1 = \frac{|x_m|_1}{|x_m|_2} \to 0,$ ، ومنه: $y_m \to 0$. إن ما حصلنا عليه من علاقات يناقض وحدانية النهاية (33.3 ـ أ). إذن اصبحت المتراجحة (2) مؤكدة.

نطبق الآن النتيجة جـ لإنماء البرهان على مقولتنا.

بصفة خاصة، وبما أن الفضاء R_n تام بالنسبة للنظيم الاقليدي $|x|_2$ (27.3 ـ جـ) فإنه كذلك بالنسبة لأي نظيم آخر $|x|_1$.

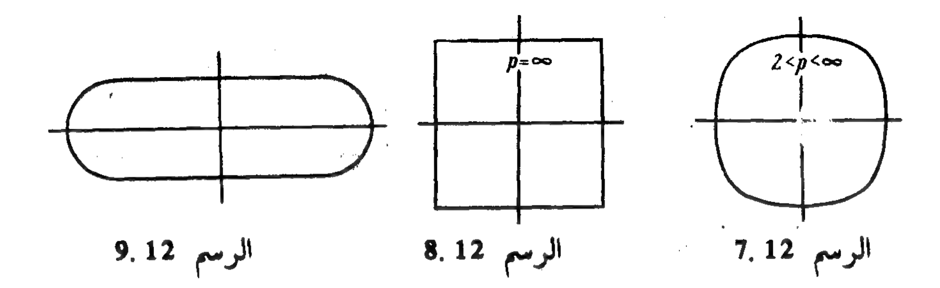


الرسم 6.12 — الرسم 5.12 — الرسم 4.12

س. لدينا ما يلي كنتيجة لما توصلنا اليه:

إن التقارب بالنسبة لأي نظيم في فضاء ذي بعد منته R_n يكافيء التقارب بالنسبة للاحداثيات.

تبين الرسوم 4.12 ـ 8.12 كرات الوحدة الخاصة بالنظيمات $|x|_\infty$ ، $|x|_1$ ، $|x|_p$ المعبرة كامثلة في 33.12 ، من اجل $n = 2$. أما الرسم 9.12 فهو خاص بنظيم من نمط آخر. انظر التمرين 20 بخصوص الحالة $p < 1$.



الرسم 7. 12 الرسم 8. 12 الرسم 9. 12

63. 12 . إن الكرة $|x| \leqslant 1$ متراصة في فضاء اقليدي بعده n (3. 69 ـ ر). نلاحظ ان الكرة $\|x\| \leqslant 1$ متراصة دوما في كل فضاء نظيمي بعده n إذْ ان كل نظيم يكافيء، حسب 53. 12 ـ د، النظيم الاقليدي. هل توجد فضاءات نظيمية ذات ابعاد غير منتهية تكون فيها كرة الوحدة $\|x\| \leqslant 1$ متراصة؟ إن الجواب عن هذا السؤال هو لا ؛ فالتارص إذن خاصية مميزة للفضاءات ذات الابعاد المنتهية.

أ . توطئة. ليكن E فضاء جزئيا مغلقا من فضاء شعاعي نظيمي R بحيث $E \neq$ R يوجد شعاع $y \in$ R بحيث $|y| = 1$ وَ $|y - x| \geqslant 1/2$ من اجل كل العناصر $x \in E$.

البرهان. نختار $y_0 \in \mathrm{R} - E$ ؛ ليكن $d = \inf |y_0 - x|$ من اجل $x \in E$. لو كان $\inf |y_0 - x| = 0$ لوجدت متتالية $x_n \in E$ تؤول الى y_0 ؛ وبما ان E مغلق، فإننا نجد حينئذ $y_0 = \lim x_n \in E$ وهذا يناقض الفرض. وبالتالي فإن $d > 0$. نبحث عن شعاع $x_0 \in E$ بحيث $|y_0 - x_0| < 2d$. نضع $y = \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|}$ لدينا $|y| = 1$ ؛ زيادة على ذلك $x_0 + x|y_0 - x_0| \in E$ مهما كان $x \in E$ وَ:

$$|y - x| = \left| \frac{y_0 - x_0}{|y_0 - x_0|} - x \right| = \left| \frac{y_0 - x_0 - x|y_0 - x_0|}{|y_0 - x_0|} \right| \geqslant \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

وهو المطلوب.

ب . نظرية (ف. ريس F. Riesz) إن كرة الوحدة في فضاء نظيمي R ذي بعد غير منته ليست مجموعة شبه متراصة.

البرهان. ننشيء في كرة الوحدة للفضاء R متتالية

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ من الاشعة البعيدة عن بعضها البعض بمسافة $> 1/2$. بما ان مثل هذه المتتالية لا تقبل بطبيعة الحالة، اية متتالية جزئية كوشية فإن الكرة $S = \{x: |x| \leqslant 1\}$ ليست مجموعة شبه متراصة. نختار x_1 أي شعاع $x_1 \in S$ بحيث $|x_1| = 1$. تشكل المضاعفات λx_1 لهذا الشعاع فضاء شعاعيا جزئيا مغلقا. $E_1 \subset R$ يوجد حسب التوطئة أ شعاع $x_2 \in S$, بحيث $|x_2| = 1$. وَ $|x_2 - x| > 1/2$ من اجل كل $x \in E_1$ ؛ لدينا بصفة خاصة $|x_2 - x_1| > 1/2$ إتشكل العبارات الخطية $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ فضاء جزئية مغلقا. $E_2 \subset R$. يوجد، حسب التطوئة أ، شعاع $x_3 \in S$, بحيث $|x_3| = 1$ وَ $|x_3 - x| > 1/2$ إمن اجل كل $x \in E_2$ ؛ بصفة خاصة:

$$|x_3 - x_1| > 1/2, \quad \text{،} \quad |x_3 - x_2| > 1/2$$

بمواصلة هذه العملية نحصل على متتالية $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ من الفضاءات الجزئية ذات الابعاد المنتهية يمثل كل واحد منها جزءا ذاتية من R (نظرا لكوْن هذا الاخير ذا بعد غير منته)، وعلى متتالية: $x_1, x_2, \ldots$ من الاشعة بحيث $|x_m - x_n| > 1/2$. كنا اشرنا في بداية البرهان الى أن ذلك يحل المسألة المطروحة.

42 .73 . سلاسل الاشعة في فضاء نظيمي. يمكن في فضاء متري اعتبار المتتاليات المتقاربة، لكن مفهوم السلسلة المتقاربة ليس له معنى. أما في فضاء شعاعي نظيمي فإن مفهوم سلسلة اشعة متقاربة له معنى.

أ. لتكن السلسلة التالية المؤلفة من عناصر من فضاء نظيمي R .

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \qquad (1)$$

نقول عن السلسلة (1) إنها **متقاربة** في R إذا كانت المتتالية $s_1 = x_1$, ، $s_2 = x_1 + x_2$, ، ... وهي متتالية المجاميع الجزئية، متقاربة في R ؛ تكون في هذه الحالة النهاية $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ للمجاميع الجزئية، تعريفا، مجموع السلسلة (1). إذا لم تكن متتالية المجاميع الجزئية s_n غير متقاربة

قلنا ان السلسلة (1) متباعدة في R ولا يكون لها في هذه الحالة أي مجموع.

لكي تتقارب السلسلة (1) يلزم، ويكفي إن كان الفضاء R تاما، ان يتحقق مقياس كوشي: من اجل كل $0 < \varepsilon$ يوزد عدد N طبيعي بحيث:

$$|s_n - s_m| = |x_{m+1} + \ldots + x_n| < \varepsilon \qquad (2)$$

وهذا مهما كان $m > N$ و $n > m$.

ب. إذا تقاربت السلسلة العددية المؤلفة من نظيمات الاشعة x_n، فإن السلسلة (1) متقاربة ايضا في حالة فضاء R قام، لأن.

$$|x_{m+1} + \ldots + x_n| \leqslant |x_{m+1}| + \ldots + |x_n|,$$

ويمكننا تطبيق مقياس كوشي.

ج. مقياس فايرشتراس (Weierstrass) تكون السلسلة (1) متقاربة إذا تحققت المتراجات $|x_n| \leqslant \alpha_n$، المتعلقة بالنظيمات، من اجل كل n (ابتداء من رقم كيفي) وكانت السلسلة العددية $\sum_1^\infty \alpha_n$ متقاربة.

ذلك ان الفرض يؤدي الى تقارب السلسلة $\sum_1^\infty |x_n|$ مع السلسلة $\sum_1^\infty \alpha_n$ حسب مقياس المقارنة.

د. مقياس كوشي. تكون السلسلة (1) متقاربة إذا كان:

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$، ومتباعدة اذا كان $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$. يتم البرهان كما تم في 41.6 .ب بخصوص سلسلة عددية.

ر. مقياس آبل - ديركليت (Abel - Dirichlet) تكون السلسلة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + \ldots, \qquad (3)$$

حيث ... $x_1, x_2,$ اشعة من الفضاء R و ... $a_1, a_2,$ اعداد حقيقية متقاربة في R إذا آلت الاعداد a_n الى الصفر وكانت هذه المتتالية متناقصة وكانت: $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ محدودة (بالتنظيم) بعدد مثبت.

طريقة البرهان هي الواردة في 74.6 بعد تعويض الطويلات بالنظميات

س. مثال نعتبر السلسلتين:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n \cos nt, \tag{4}$$

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nt \tag{5}$$

في الفضاء $R^s(a, b)$. نذكر أن $R^s(a, b)$ فضاء تام (32.12 ـ س) وان التقارب بالنظيم في الفضاء $R^s(a, b)$ هو التقارب المنتظم على المجال $[a, b]$. ان نظيمات التوابع $\cos nt$ وَ $\sin nt$ في الفضاء $R^s(a, b)$ لا تتجاوز 1. إذن إذا كان $\sum | a_n | < \infty$ أو $\sum | b_n | < \infty$ فإن السلسلة (4) و (5) على التوالي متقاربة في الفضاء $R^s(a, b)$ (حسب مقياس فايرشتراس) اي انها متقاربة بانتظام على $[a, b]$ مهما كان a وَ b.

في حالة تباعد السلسلة المؤلفة من الاعداد a_n أو الاعداد b_n، وشريطة أن يكون $a_n \downarrow 0$ (أو: $b_n \downarrow 0$) يمكننا استخدام مقياس آبل ـ ديركليت.

لدينا فيما يخص مجاميع التابع الجيبي او جيب التمام (74.6(9)):

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\cos t}}. \tag{6}$$

إذا تغير t في المجال $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$، حيث $\varepsilon > 0$، فإن الطرف الايمن من المتراجحة (6) محدود ويمكننا الانتقال في الطرف الايسر الى القيمة العظمى:

$$\max \left| \sum_{0}^{n} \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right| = \left\| \sum_{0}^{n} \begin{matrix} \cos mt \\ \sin mt \end{matrix} \right\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\cos \varepsilon}}.$$

يضمن ذلك قابلية تطبيق مقياس آبل ـ ديركليت في الفضاء $R^s(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. وهكذا فإن السلسلتين (4) وَ (5)، ضمن الفرض $a_n \searrow 0$ و $b_n \searrow 0$، متقاربتان بانتظام على كل مجال $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. قد تكون السلسلتان غير متقاربتين بانتظام على المجال $[0, 2\pi]$ (على الرغم من تقارب التوابع الجيبية عند كل نقطة) سنرى اسفله ان:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0 \text{ et } t = 2\pi, \\ \frac{\pi - t}{2} & \text{pour } 0 < t < 2\pi, \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt = -\ln 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \quad (0 < t < 2\pi). \tag{8}$$

إذا تقاربت السلسلة (7) بانتظام على $[0, 2\pi]$، اي بالنسبة لنظيم الفضاء $R^2(0, 2\pi)$، فإن مجموعها $s(t)$ ينتمي الى هذا الفضاء وبالتالي يصبح تابعا مستمراً على $[0, 2\pi]$. الآ اننا نرى من خلال (7) ان التابع $s(t)$ متقطع عند النقطتين 0 وَ 2π، وبالتالي فإنه ليس هناك تقارب منتظم لِـ (7) على المجال $[0, 2\pi]$.

ان مجموع السلسلة (8) غير محدود في $[0, 2\pi]$ وبالتالي فإن هذه الاخيرة لا تتقارب بانتظام، ايضا، على $[0, 2\pi]$.

ليس هناك تقارب منتظم للسلسلتين (7) وَ (8) على المجال المفتوح $(0, 2\pi)$.

12 .83 . تتمة فضاء نظيمي. كما هو الشأن بالنسبة للفضاءات المترية فإن الفضاءات النظيمية قد تكون تامة او غير تامة إذا كان لدينا فضاء نظيمي R غير تامة فبإننا نستطيع تتميمه بايجاد فضاء متري تام $\bar{R}$ يحوي R (§ 3.8) زيادة على ذلك، فإن تتمة فضاء نظيمي فضاء ليس مترياً فحسب بل نظيميا ايضا: ندخل على التتمة العمليتين الخطيتين ونتأكد من مسلمات الفضاء النظيمي.

كمنا عرفنا عنصر X من تتمة فضاء متري R كرمز موافق لصف مؤلف من متتالية كوشية متحدة النهاية في الفضاء R . ليكن الآن R فضاء نظيمياً عندئذ اذا جمعنا حدا حداً عناصر متتاليتين كوشيتين $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ وَ $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ نحصل على متتالية:

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n,\ \ldots,$$

هي متتالية كوشيه لأن

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|.$$

إذا عوضنا هنا المتتالية $\{x_n\}$ بمتتالية متحدة النهاية $\{x'_n\}$ والمتتالية $\{y_n\}$ بمتتالية متحدة النهاية $\{y'_n\}$ نحصل على متتالية مجاميع

$\{x'_n + y'_n\}$ متحدة النهاية مع المتتالية $\{x_n + y_n\}$ لأن:

$$\| (x'_n + y'_n) - (x_n + y_n) \| \leqslant \| x'_n - x_n \| + \| y'_n - y_n \|.$$

يسمح ذلك بتعريف جمع عناصر الفضاء $\bar{R}$.

نختار في صف X متتالية كوشيه $\{x_n\}$ وفي صف Y متتالية كوشية $\{y_n\}$ ؛ نعرف مجموع X وَ Y على أنه الصف الذي يحوي متتالية كوشي $\{x_n + y_n\}$.

تؤكد الاستدلالات السابقة، بصفة خاصة، على ان نتيجة الجمع لا تتعلق باختيار المتتاليتين $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ في الصفين X وَ Y، على التوالي.

نعرف بطريقة مماثلةجداء صف X في عدد λ كما يلي: نختار متتالية كوشية $\{x_n\}$ في الصف X ونعرف الجداء λX على انه الصف الذي يحوي المتتالية الكوشية $\{\lambda x_n\}$. نترك للقاريء مهمة اثبات سلامة هذا التعريف.

من السهل التأكد من المسلمات 12 .11 الخاصة بالفضاء الشعاعي؛ يتبين من التعريف نفسه أن العمليتين الخطيتين على الصفوف تردان الى لعمليتين الموافقتين لها على عناصر الفضاء الاول. بصفة خاصة يتألف الصف 0 من كل المتتاليات المتقاربة نحو 0 في الفضاء R.

يبقى ان ندخل نظيما في الفضاء $\bar{R}$ وان نتأكد من المسلمات 12 .13 أ ـ ج نعرف نظيم صف X بالدستور:

$$\| X \| = \rho (X, 0),$$

حيث يرمز أ للمسافة في الفضاء المتري التتمة $\bar{R}$ (3 .28(1)). بعبارة اخرى لدينا: $\| X_n \| = \lim \rho (x_n, 0)$ حيث x_n متتالية كوشية من الصف X . إذا كان $\| X \| = 0$ فإن $\lim \| x_n \| = 0$ اي ان المتتالية $\{x_n\}$ متحدة النهاية مع المتتالية $\{0,0,\ldots\}$ التي تعرف الصف 0 ؛ إذن $X = 0$ وبذلك تأكدنا من المسلمة 12 .13 ـ أ. بعد تثبيت متتاليتين كوشيتين $\{x_n\}$ وَ

المتتالية $X + Y$ في الصف Y و X، على التوالي. نختار في الصفين $\{y_n\}$، في الصف $\{x_n + y_n\}$ الكوشية. بما ان: $\| x_n + y_n \| \leqslant \| x_n \| + \| y_n \|$ فإن:

$$\| X + Y \| = \lim \| x_n + y_n \| \leqslant \lim \| x_n \| + \lim \| y_n \| = \| X \| + \| Y \|,$$

وبذلك نتأكد من المسلمة 13.12 ـ ج لدينا بطريقة مماثلة:

$$\| \lambda X \| = \lim \| \lambda x_n \| = | \lambda | \lim \| x_n \| = | \lambda | \, \| X \|,$$

وبذلك نتأكد ايضا من المسلمة 13.12 ـ ب. انتهيا من البرهان على مقولتنا.

93.12 . الفضاءات الشعاعية العقدية النظيمية.

أ . اعتبرنا في 12.13–12–83 الفضاءات الحقيقية النظيمية إنه ليس من الصعب ادخال مفهوم فضاء نظيمي على حقل الاعداد العقدية.(*) . ان مثل هذا الفضاء هو تعريفا فضاء شعاعي عقدي C يسمى **فضاء عقديا نظيميا** إذا وصلنا كل شعاع $x \in C$ بعدد غير سالب $|x|$، وهو نظيم الشعاع x ، يحقق الشروط التالية:

1) $|x| > 0$ إن كان $x \neq 0$ ، $|0| = 0$ ،

2) $|\alpha x| = |\alpha| \, |x|$ من اجل كل $x \in C$ ومن اجل كل α عقدي.

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ من اجل x و y في C (مسلمة المثلث).

بما ان الضرب في كل الاعداد العقدية جائز في فضاء عقدي فإن كل فضاء نظيمي عقدي هو في آن واحد فضاء نظيمي حقيقي. وبالتالي نستطيع تمديد صلاحية خاصيات الفضاءات الحقيقية النظيمية، مباشرة او بشكل فيه تغير طفيف الى الفضاءات العقدية النظيمية. بصفة خاصة فإن فضاء نظيميا عقديا، مثل الحالة الحقيقية، فضاء متري مزوداً بالمسافة المعرفة بالدستور $\rho(x, y) = |x - y|$.

ب . إن الفضاء المؤلف من كل التوابع $x(t)$ ذات القيم العقدية المحدودة

---

* لا يمكن تعميم التعريف التي حالة فضاء شعاعي على حقل كيفي K لأن القيمة المطلقة $|\alpha|$ غير معرفة من اجل العناصر α في حقل كيفي K.

والمستمرة على فضاء متري ,M المزود بالنظيم:

$$\| x \| = \sup_t | x(t) |,$$

فضاء عقدي نظيمي؛ نرمز له بـ $C^s(M)$. إن هذا الفضاء تام (32.12 ـ س).

ج. يمثل الفضاء المؤلف من التوابع $x(t)$ العقدية المستمرة على مجال $[a, b]$ المزود بالنظيم:

$$\| x \|_p = \sqrt[p]{\int_a^b | x(t) |^p \, dt},$$

فضاء عقدي نظيمي؛ نرمز له بـ $CL_p^s(a, b)$ (أو باختصار بـ: $L_p^s(a, b)$ كما هو الحال فيما يخص التوابع الحقيقية إذا استحال وجود اي التباس).

د. إن الفضاء المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المستمرة والمحدودة على فضاء متري ,M قيمها في فضاء عقدي نظيمي ,C المزود بالنظيم:

$$\| x \| = \sup_t | x(t) |$$

(حيث يرمز $| x(t) |$ للنظيم في الفضاء C)، يمثل فضاء عقديا نظيميا؛ نرمز له بـ $C^s(M)$. إنه تام إن كان C كذلك (32.12 .س).

ر. بعد اجراء تغيير طفيف تصبح امثلة الفضاءات الحقيقية النظيمية ذات الابعاد المنتهية الواردة ضمن 32.12ـ ج امثلة مماثلة لفضاءات عقدية نظيمية ذات ابعاد نتهية: يكفي تعويض الشعاع الحقيقي $x = (\xi_1, .., \xi_n)$ بالشعاع العقدي (أي اعتبار الاحداثيات $\xi_1, \ldots, \xi_n$ كاعداد عقدية) وكتابة في الدستورين (6) وَ (4) $| \xi_k |^2$ وَ $| \xi_k |^p$ بدل ξ_k^2 ؛ وَ ξ_k^p. بنفس الطريقة نحصل على الفضاءات العقدية المماثلة لـ l_p ذات الابعاد غير المنتهية (33.12 ـ د).

س. نقول عن مجموعة E في فضاء عقدي نظيمي C إنه **محدبة مطلقا** إذا احتوت كل النقاط ذات الشكل $\alpha x + \beta y$ حيث α وَ β عقديان

يحققان $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$ ، عند احتوائها النقطتين x وَ y . إن كل كرة $\{x \in C : |x - x_0| \leqslant \rho\}$ في فضاء عقدي نظيمي مجموعة محدبة مطلقاً.

ص. تبقى شروط تكافؤ لاالنظيات في فضاء حقيقي نظيمي (53.12 أ ـ س) قائمة بخصوص النظيات في فضاء عقدي. بصفة خاصة. إن كل نظيمين في فضاء عقدي بعده منته متكافئان، كما ان التقارب بالنسبة لواحد منهما هو التقارب بالنسبة للإحداثيات. إن كل الفضاءات العقدية النظيمية ذات الابعاد المنتهية فضاءات تامة كما هو الحال فيما يخص الفضاءات الحقيقية.

ط. بعد البرهان فيما يتعلق بالفضاءات الحقيقية، على نظرية ريس حول عدم تراص الكرات في فضاء نظيمي ذي بعد غير منته يصبح البرهان على نفس النظرية في الحالة العقدية امراً مقتضياً.

ع. ان كل نظرية تقارب سلاسل الاشعة في فضاء نظيمي الواردة في 73.12 بخصوص فضاء حقيقي تمتد، بدون اي تغيير، الى حالة فضاء عقدي نشير هنا الى مثال مميز. لتكن سلسلة القوى:

$$\sum_{0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

حيث z وَ z_0 عددان عقديان والمعاملات a_k عناصر من فضاء عقدي نظيمي وتام C . إن هذه السلسلة متقاربة داخل القرص ذي نصف القطر:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\| a_n \|}}$$

المتمركزة في النقطة z_0 ، ومتباعدة خارج هذا القرص. تثبت هذه النتيجة مثل دستور كوشي ـ هادامار الوارد في 26.6 ، بتطبيق مقياس كوشي 73.12 ـ د.

ف. إن التتمة $\bar{C}$ لفضاء عقدي نظيمي C تنشأ كما هو وارد في الفضاءات الحقيقية (83.12) وتمثل فضاء عقديا نظيميا تاما.

§ 12 .4 . الفضاءات الهيلبرتية.

12 .14 . نستطيع في فضاء نظيمي قياس المسافات ولا يمكننا قياس الزوايا الامر الذي يضيّق امكانيات التفسير الهندسي. لدينا، تعريفا، في فضاء هيلبرتي جداء سلمي للاشعة يمكننا من التعبير عن اطوال الاشعة وكذا الزوايا التي تشكلها. هاهو التعريف المضبوط للجداء السلمي: نقول عن فضاء شعاعي حقيقي H إنه فضاء هيلبرتي اذا عرفنا من اجل كل شعاعين كيفيين x وَ y من H عدداً حقيقياً (X,y) يسمى الجلاء السلمي للشعاعين x وَ y، يتمتع بالخاصيات التالية:

أ . $(x, x) > 0$ إذا كان: $x \neq 0$، $(0, 0) = 0$.

ب . $(x, y) = (y, x)$ مهما كان x وَ y في H .

جـ . $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ مهما كان x وَ y في H والعدد الحقيقي α.

د . $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ مهما كان x ، y ، z في H .

يأتي من المسلمات ب ـ د الدستور العام (بالتدريج) التالي:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k (x_j, y_k). \qquad (1)$$

إن المسلمات السابقة متعلقة بالفضاءات الهيلبرتية الحقيقية؛ سنقدم اسفله المسلمات المتعلقة بالفضاءات الهيلبرتية العقدية (12 .44).

12 .24 . أمثلة.

أ . إن الفضاء الاقليدي ذي n بعداً R_n الذي ادخل ضمن 2 .86 بالجداء السلمي المعرف بالدستور:

$$(x, y) = \sum_{1}^{n} \xi_k \eta_k, \qquad (1)$$

حيث $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ، $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ ، يحقق الشروط الواردة اعلاه.

ب . يمكن تزويد الفضاء ذي n بعدا R_n بجداء سلمي آخر. انه من السهل تمييز كل الجداءات السلمية الممكنة في R_n . إذا كان (x, y) جداء

سلميا في R_n وكان $x = \sum \xi_k e_k$ ، $y = \sum \eta_k e_k$ يمثلان نشرا عنصرين x وَ y ضمن اساس $e_1, \ldots, e_n$ (57.2) فإن لدينا، حسب الدستور 14.12 (1):

$$(x, y) = (\sum_k \xi_k e_k, \sum_j \eta_j e_j) = \sum \xi_k \eta_j (e_k, e_j).$$

وهكذا يكفي معرفة قيم الجداء السلمي من اجل اشعة الاساس (e_j, e_j). عند ذلك يعين الجداء السلمي لشعاعين كيفيين x، y بطريقة وحيدة حسب الاعداد $\omega_{jk} = (e_j, e_k)$. يجب على الاعداد ω_{jk} أن تحقق شرط التناظر $\omega_{jk} = (e_j, e_k) = (e_k, e_j) = \omega_{kj}$ والمتراجحة:

$$(x, x) = \sum \xi_j \xi_k \omega_{jk} > 0$$

وهذا من اجل كل $x \neq 0$، يعني ذلك ان المصفوفة $\| \omega_{jk} \|$ متناظرة ومعرفة موجبة. يبرهن في الجبر ان المتراجحات التالية تمثل شرطا لازما وكافيا لكي تكون مصفوفة متناظرة $\| \omega_{jk} \|$ معرفة موجبة:

$$\omega_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n1} & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

وبالعكس فإن كل مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة $\| \omega_{jk} \|$ تعرف حسب الدستور:

$$(x \ \ y) = \sum \xi_j \eta_k \omega_{jk},$$

جداء سلميا في الفضاء R_n ، يحقق المسلمات 14.12 أ - د. يمكن للقارىء بعد كل ما قيل القيام بالبرهان دون أدنى صعوبة.

جـ. ندخل في الفضاء $R^s(a, b)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة جداء سلميا، مثلا، انطلاقا من الدستور التالي الذي يعتبر بمثابة المماثل المستمر للدستور (1):

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \qquad (2)$$

---

* راجع [14، 69.7].

إن التأكد من مسلمات الفضاء الهيلبرتي بخصوص هذا التعريف امر يسير نظرا للخاصيات المعتادة للتكامل. (هناك طرق اخرى لتزويد الفضاء $R^2(a, b)$ بجداء سلمي).

د. نعتبر الفضاء الشعاعي l_2 (33.12 ـ د) المؤلف من كل المتتاليات العددية $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \infty 0$. نعرف الجداء السلمي (x, y) لشعاعين $x = \{\xi_n\} \in l_2$ وَ $y = \{\eta_n\} \in l_2$ بالدستور:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n. \quad (3)$$

إن التقارب، وحتى التقارب المطلق، لسلسلة الطرف الايمن ينتج من المتراجحة $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ القائمة من اجل كل ثنائية عددين حقيقيين a وَ b. كما ان المسلمات 14.12 أ ـ د بديهية في هذه الحالة.

وهكذا فإن الفضاء l_2 فضاء هيلبرتي. يطابق النظيم المولد عن الجداء السلمي (3) نظيم l_2 المدخل في 33.12 ـ د.

34.12 . هندسة الفضاء الهيلبرتي.

أ. كنا استخلصنا، منذ 86.2، متراجحة كوشي ـ بونياكو فسكي:

$$|(x, y)| \leqslant +\sqrt{(x, x)(y, y)} \quad (1)$$

بالنسبة لشعاعين كيفيين x وَ y من فضاء هيلبرتي H (لأننا في الواقع لم نستعمل سوى مسلمات الفضاء الهيلبرتي).

نزود الفضاء الهيلبرتي H بالنظيم:

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}.$$

يمكن التأكد بسهولة من المسلمات 13.12 لفضاء هيلبرتي: تنتج المسلمة 13.12 ـ أ من المسلمة 14.12 ـ أ، والمسلمة 13.12 ـ ب من 14.12 ـ ج. اما فيما يخص مسلمة المثلث 13.12 ـ ج فإننا استخصلناها من مسلمات الفضاء الهيلبرتي ضمن 86.2 باستخدام المتراجحة (1).

وهكذا فإن كل المفاهيم والخاصيات المرتبطة بوجود نظيم قائمة في

الفضاءات الهيلبرتية. لكن لما كانت هذه الفضاءات تمثل حالات خاصة من الفضاءات النظيمية فإنه من حقنا ان نتوقع ان يعطى نظيم الفضاء الهيلبرتي خاصيات أخرى مميزة. ها هي خاصية من هذا النوع:

توطئة حول متوازي الاضلاع:. لدينا المساواة التالية من اجل كل شعاعين x وَ y من فضاء هيلبرتي H :

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2 \qquad (3)$$

(« إن مجموع مربعي قطري متوازي اضلاع يساوي مجموع مربعات اضلاعه »).

يتمثل البرهان في تحويل بسيط:

$$||x+y||^2+||x-y||^2=(x+y,\ x+y)+(x-y,\ x-y)=$$
$$=2(x,\ x)+2(y,\ y)=2||x||^2+2||y||^2.$$

يمكن البرهان على انه إذا حقق نظيم فضاء نظيمي الشرط (3) فإن هذا النظيم مولد عن جداء سلمي (التمرين 4).

ما هو شكل سطح الكرة $\{||x||=1\}$ في R_n في الحالة التي يكون فيها النظيم $||x||$ محصلا عليه انطلاقا من جداء سلمي $(x,\ y)$ حسب الدستور: $||x||=\sqrt{(x,\ x)}$ (راجع 86.2 ـ أ)؟

لدينا فى هذه الحالة:

$$(x,\ x)=\Big(\sum_j \xi_j e_j,\ \sum_k \xi_k e_k\Big)=\sum_j\sum_k \xi_j\xi_k(e_j,\ e_k)=1,$$

أي أن سطح الكرة $||x||=1$ سطح ذو مركز من الدرجة الثانية، بما انه محدود فهو يمثل مجسما ناقصياً.

ب. لتكن $x_n\to x$ وَ $y_n\to y$ متتاليتين متقاربتين عناصرهما في فضاء هيلبرتي H . لنثبت ان: $(x_n,\ y_n)\to(x,\ y).$

لدينا بالفعل:

$$(x,\ y)-(x_n,\ y_n)=(x,\ y-y_n)+(x-x_n,\ y_n),$$

ومن المتراجحة (1) يأتي:

$$|(x, y)-(x_n, y_n)| \leqslant \|x\| \|y-y_n\| + \\ + \|x-x_n\| \|y_n\|;$$

يؤول الطرف الايمن الى 0 لما n يؤول الى ∞ لأن $\|y-y_n\| \to 0$ وَ $\|x-x_n\| \to 0$ ولأن المتتالية المتقاربة y_n محدودة (33.3 ـ ب).

ج. يمكن في فضاء هيلبرتي ليس فحسب قياس اطوال (نظيمات) الاشعة بل ايضا الزوايا تشكلها هذه الاشعة. نعرف زاوية شعاعين غير منعدمين x وَ y بالدستور: $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$;

تضمن المتراجحة (1) وجود هذه الزاوية (في المجال $[0, \pi]$).

د. نقول عن شعاعين x وَ y من فضاء هيلبرتي H إنهما متعامدان إذا كان $(x, y) = 0$. إذا كان $x \neq 0$ وَ $y \neq 0$ فإن هذا التعريف يعني ان زاوية الشعاعين x وَ y تساوي $\frac{\pi}{2}$. إن الشعاع المنعدم عمودي على كل شعاع.

يكتب شرط التعامد في فضاء اقليدي R_n بالجداء السلمي 24.12 (1) باعتبار شعاعين: $x = (\xi_1 \ldots, \xi_n)$ وَ $y = (\eta_1 \ldots, \eta_n)$، على الشكل:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = 0.$$

ويكتب شرط التعامد في الفضاء التابعي $R^2(a, b)$ بالجداء السلمي 24.12 (2)، باعتبار الشعاعين $x = x(t)$ وَ $y = y(t)$، على الشكل:

$$\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

ر. إذا كان الشعاع x عمودياً على الاشعة $y_1, \ldots, y_m$، فهو عمودي على كل عبارة خطية $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m$. ذلك أن:

$$(x, \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m) = \alpha_1 (x, y_1) + \ldots \\ \ldots + \alpha_m (x, y_m) = 0.$$

ومنه ينتج ان مجموعة كل الاشعة المتعامدة على شعاع x (أو على كل شعاع من مجموعة مثبتة $\bar{X} \in H$) تشكل فضاء جزئيا في H ؛ يسمى هذا الفضاء الجزئي المكمل المتعامد على (أو لـِ) الشعاع x (المجموعة X على التوالي).

س. **نظرية فيثاغورس وتعميمها**. نفرض أن شعاعين x وَ y متعامدان حينئذ يمكن، كما هو الحال في الهندسة الاولية، تسمية الشعاع $x + y$ قطر (أو وتر) المثلث القائم الزاوية المنشأ على الشعاعين x وَ y. بتشكيل الجداء السلمي للشعاع $x + y$ في نفسه وباستخدام تعامد x وَ y نحصل على:

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2 (x, y) + (y, y) =$$
$$= \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

أثبت في فضاء هيلبرتي كيفي نظرية فيثاغورس: مربع القطر (أو الوتر) يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين. من السهل تعميم هذه النظرية الى حالة عدد كيفي من الحدود: لتكن $x_1, \ldots, x_k$ أشعة متعامدة مثنى مثنى وَ $y = x_1 + \ldots + x_k$، لدينا:

$$\| y \|^2 = (x_1 + \ldots + x_k, x_1 + \ldots + x_k) =$$
$$= \| x_1 \|^2 + \ldots + \| x_k \|^2.$$

ص. **المعامدة**. للحصول على جملة اشعة متعامدة، نلجأ غالبا الى معاملة جملة معطاة غير متعامدة. نعرض هنا كيفية المعامدة. لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ جملة اشعة في فضاء هيلبرتي H، نفرض ان كل جملة جزئية منتهية $x_1, \ldots, x_n$ من الجملة السابقة، مستقلة خطية. باستخدام الدساتير:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + x_2, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,\, n-1}x_{n-1} + x_n, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

مع اختيار المعاملات a_{jk} اختيارا جيداً، يمكن الحصول على جملة: $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ من الاشعة غير المنعدمة والمتعامدة مثنى مثنى.

تسمى الدساتير (4)، بمعاملات a_{jk} جيدة الاختيار، **دساتير المعامدة.**

إن وجود حل لهذه الجملة يحقق الشروط المطلوبة المتعلقة بالتعامد يثبت بسهولة بطريقة التدريج. لرؤية ذلك نفرض أننا انشأنا الاشعة $y_1, \ldots, y_{n-1}$ غير المنعدمة والمتعامدة مثنى مثنى والمحققة للمعادلات الاولى البالغ عددها $n-1$ في الجملة (4)، نبين بعد ذلك أنه بالإمكان ايجاد شعاع y_n يحقق المعادلة ذي الرتبة n في (4)، وعمودي على الاشعة $y_1, \ldots, y_{n-1}$. نبحث عن الشعاع y_n في شكل عبارة خطية للأشعة $x_1, \ldots, x_n$ وهذا على النحو:

$$y_n = b_{n1}y_1 + \ldots + b_{n,n-1}y_{n-1} + x_n, \quad (5)$$

حيث $y_1, \ldots, y_{n-1}$ هي الاشعة المحصل عليها سابقا، وَ: $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ هي المعاملات الواجب تعيينها. بضرب المعادلة (5) سلمياً في y_k (حيث $(k < n)$) وباستخدام التعامد المفروض لـ y_k على: $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{n-1}$ نحصل على:

$$(y_n, y_k) = b_{nk}(y_k, y_k) + (x_n, y_k).$$

بجعل الطرف الايمن مساوياً للصفر نصل الى معادلة بالنسبة للمعامل b_{nk} قابلة للحل لأن $(y_k, y_k) \neq 0$ وهذا حسب فرض التدريج.
عندما يتم وجود كل المعاملات $b_{n1}, \ldots, b_{n,n-1}$ فإن المساواة (5) تعين الشعاع y_n. يكون هذا الشعاع، انشاءً، عمودياً على كل من الاشعة $y_1, \ldots, y_{n-1}$، يبقى ان نثبت بان $y_n \neq 0$. من اجل ذلك ننقل في المعادلة رقم n في (4) عبارات $y_1, \ldots, y_{n-1}$ المحصل عليها من المعادلات السابقة البالغ عددها $n-1$، نحصل عندئذ على عبارة خطية لـ y_n بدلالة $x_1, \ldots, x_n$ حيث يساوي معامل x_n العدد 1.
لو كان y_n منعدما فإننا نحصل على ارتباط خطي بين الاشعة $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$، وهذا غير صحيح حسب فرض التدريج. إذن $y_n \neq 0$، ينتهي بذلك عرض طريقة المعامدة.

يمكن « تحسين » الجملة المتعامدة المحصل عليها $y_1, \ldots, y_n, \ldots$
بتقسيم كل شعاع y_n على طوله فنحصل على جملة اشعة $e_n = \frac{y_n}{\| y_n \|}$
متعامدة وفي نفس الوقت متجانسة أو نظيمية، أي أن نظيم كل شعاع e_n
يساوي 1 . نقول عن هذه الجملة، إنها جملة متعامدة ومتجانسة.

ط. تشاكل فضاءين اقليديين بعداهما n . طبقا للتعريف العام لتشاكل بنيتين رياضيتين (25.2)، نقول عن فضاءين هيلبرتيين H' وَ H'' إنهما متشاكلان إذا كانا متشاكلين بوصفهما فضاءين شعاعيين (12 .41–4) وإذا كانت، زيادة على ذلك، الصلتان $x' \leftarrow\rightarrow x''$ ، $y' \leftarrow\rightarrow y''$
(حيث x'، $y' \in H'$، وَ x''، $y'' \in H''$) تستلزمان:

$$(x', y') = (x'', y'').$$

لنبرهن على أن فضاءين هيلبرتيين كيفيين من نفس البعد n ، فضاءان متشاكلان.

للقيام بذلك ننشىء في فضاء ذي n بعداً معطي H_n أساسا متعامداً ومتجانسا $e_1, \ldots, e_n$ وهذا بمعامدة أية جملة n شعاعا مستقلة خطيا وفق الطريقة الواردة في ص. نحسب الجداء السلمي لشعاعين $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ وَ et $y = \sum_1^n \eta_m e_m$. بما ان الاشعة $e_1, \ldots, e_n$ متعامدة ومتجانسة، فإن:

$$(6)\quad (x, y) = (\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_m e_m) = \sum_1^n \sum_1^n \xi_k \eta_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \eta_k.$$

وهكذا يمكن تمثيل أي فضاء هيلبرتي بعده n H_n كفضاء احداثيات (وهذا بوصل كل شعاع $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ بمجموعة احداثياته ($\xi_1, \ldots, \xi_n$)) مزود بالجداء السلمي المعرف بـ (6). يعني ذلك ان الفضاء H_n متشاكل مع الفضاء R_n (12 .24 ـ أ). وبالتالي فإن كل فضاءين هيلبرتيين H'_n وَ H''_n بعداهما n فضاءان متشاكلان لأنهما متشاكلان مع نفس الفضاء R_n .

إن النتيجة السابقة على جانب كبير من الاهمية. لأن حتى ولو تعلق

الامر بفضاء هيلبرتي بعده غير منته فإننا عندما نعمل في فضاء جزئي بعده منته، في فضاء ذي بعدين أو ثلاثة ابعاد مثلا، نستطيع الاعتماد على النتائج المعروفة الواردة في الهندسة الاقليدية المعتادة.

44. 12 . لما كان العامل في حقل التحليل يحتاج في اغلب الاحيان للتوابع ذات القيم العقدية، فإنه يجب تعميم مفهوم الفضاء الهيلبرتي بشكل مناسب. في الحالة التي يكون فيها فضاء شعاعي عقدياً فإن قيم الجداء السلمي الذي نود ادخاله يمكن ان تكون عقدية. عندئذ لا يمكن الاحتفاظ بالشروط 14. 12* . أ ـ ج لأن العبارة (ix, ix) ينبغي أن تكون موجبة حسب أ في حين نجد، حسب ب وَ ج، أن:

$$(ix,\ ix) = i\,(x,\ ix) = i\,(ix,\ x) = i^2\,(x,\ x) < 0.$$

ولذا نسلم في فضاء عقدي بالتعريف التالي.

نقول عن فضاء شعاعي عقدي (أي فضاء شعاعي تكون عملية الضرب فيه في الاعداد العقدية) إنه فضاء هيلبرتي إذا عرفنا من اجل كل شعاعين x وَ y من H عددا عقديا (x, y) ، يسمى الجداء السلمي لـِ x وَ y ، يتمتع بالشروط التالية:

أ . $o<(x\ ,x)$ عندما $x \neq 0$ ؛ $(0, 0) = 0$.

ب . $(y, x) = \overline{(x, y)}$ مهما كان x وَ y في H. (المدة - تعني المرافق العقدي)

ج . $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$ مهما كان x وَ y في H و α عقدياً.

د . $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ مهما كان x, y, z في H.

ينتج من ب وَ ج أن:

$$(x,\ \alpha y) = \overline{(\alpha y,\ x)} = \bar{\alpha}\,\overline{(y,\ x)} = \bar{\alpha}\,(x,\ y). \qquad \text{ر}$$

نجد، انطلاقاً من ب ـ ر، الدستور العام:

$$(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \bar{\beta}_k\,(x_j,\ y_k). \qquad (1)$$

12 .54 . أمثلة.

أ. من ابسط الامثلة في الفضاءات الهيلبرتية العقدية الفضاء العقدي ذي n بعداً C_n . انه يتكون من المجموعات المرتبة المؤلفة من n عددا عقديا (احداثياً) $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$، بالعمليتين الخطيتين المتعامدتين وبالجداء السلمي المعرف كما يلي: إذا كان $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$، و $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ فإن $(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n$، حيث $\bar{\eta}_k$ هو العدد العقدي المرافق لـ η_k. إن المسلمات 12 .44 أ ـ د بديهية في هذه الحالة.

يمكن أيضا تزويد الفضاء C_n بجداءات سلمية اخرى [14 ع 1.9].

ب. هناك مثال آخر للفضاءات الهيلبرتية وهو الفضاء $C^2[a, b]$ المؤلف من التوابع $x(t)$ ذات القيم العقدية المستمرة على مجال $a \leqslant t \leqslant b$، والمزود بالجداء السلمي المعرف بالدستور:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

تنتج الخاصيات 12 .44 أ ـ د بسهولة من الخاصيات المعتادة للتكامل.

جـ. إن المماثل العقدي للفضاء الحقيقي l_2 (12 .24 ـ د) هو الفضاء المؤلف من كل المتتاليات العددية العقدية $x = \{\xi_n\}$ التي تحقق $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$. يعطى هنا الجداء السلمي بالدستور:

$$(x, y) = (\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\bar{\eta}_n.$$

يمكن التأكد من المسلمات 12 .44 بدون اية صعوبة.

12 .64 ـ أ. ليكن H فضاء هيلبرتي عقدي. نضع كما هو الحال في الحالة الحقيقية:

$$\|x\| = +\sqrt{(x, x)}. \qquad (1)$$

نبرهن على متراجحة كوشي ـ بونياكوفسكي ـ شفارتز:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \qquad (2)$$

من اجل كل عقدي α ، لدينا المتراجحة:

$$(\alpha x - y,\ \alpha x - y) \geqslant 0.$$

باجراء العمليات في الطرف الايسر يأتي:

$$\alpha\bar{\alpha}(x, x) - \alpha(x, y) - \bar{\alpha}(\overline{x, y}) + (y, y) \geqslant 0.$$

نضع $\alpha = te^{-i \arg (x, y)}$ (t حقيقي)؛ عندئذ $\alpha(x, y) = t \mid (x, y) \mid$
وتأخذ المتراجحة الشكل:

$$t^2 (x, x) - 2t \mid (x, y) \mid + (y, y) \geqslant 0.$$

بما ان ثلاثي الحدود الوارد في الطرف الايسر لا يملك جذورا حقيقية مختلفة (لو كان ذلك لتغيرت اشارته) فإن معاملاته تحقق المتراجحة:

$\mid (x, y) \mid^2 \leqslant (x, x)(y, y)$، وهو المطلوب.

ب. نلاحظ، كما هو الحال في الحالة الحقيقية، ان المتراجحة (2) تستلزم متراجحة المثلث: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

باعتبار النظيم (1).

جـ. نلاحظ أيضا، كما هو الشأن في الحالة الحقيقية، أننا نقول عن شعاعين x و y في فضاء هيلبرتي عقدي H إنهما **متعامدان** إن كان $(x, y) = 0$. نستطيع، كما ورد في 12 .24 ـ ص، معامدة كل جلة $x_1, \dots, x_n$، مؤلفة من أشعة، كل جزء منته منها مستقل خطيا، أي ان بامكاننا انشاء حسب الدساتير 12 .34 ـ ص (4)، جلة اشعة غير منعدمة ومتعامدة مثنى مثنى. بصفة خاصة، فإن كل فضاء هيلبرتي عقدي بعده n: H_n يملك اساسا متعامدا ومتجانسا $e_1, \dots, e_n$. نحصل على الجداء السلمي للشعاعين: $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ و $y = \sum_1^n \eta_m e_m$ بفضل الدستور:

$$(x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k,\ \sum_1^n \eta_m e_m\right) = \sum_1^n \xi_k \bar{\eta}_m (e_k, e_m) = \sum_1^n \xi_k \bar{\eta}_k.$$

بصفة خاصة، ينتج من الدستور (3)، كما هو الشأن في الحالة

الحقيقية، ان كل فضاء بعده n : H_n متشاكل مع الفضاء C_n (‎54.12‎ ـ أ) وان، بالتالي كـل فضـاءيـن هيلبرتيين عقـديين بعـداهما n فضـاءان متشاكلان.

‎74.12‎ تتمة فضاء هيلبرتي . كما هو الشأن في فضاء نظيمي، فإن الفضاءات الهيلبرتية (حقيقية أو عقدية) يمكن ان تكون تامة او غير تامة. وهكذا فإن الفضاءات الهيلبرتية ذات الابعاد المنتهية، حقيقية كانت او عقدية، (‎24.12‎ ـ أ، ب، ‎54.12‎ ـ أ) كلها فضاءات تامة (‎53.12‎ ـ ر، ‎93.12‎ ـ ص). إن فضاءيْ التوابع بالجداء السلمي التكاملي (‎23.12‎ ـ ج، ‎54.12‎ أ ـ ب) ليسا تامين (راجع ‎62.12‎ ـ ب). أما الفضاءات l_2، الحقيقي (‎24.12‎ ـ د) والعقدي (‎54 12‎ ـ ج) فهما تامان (التمرين 18) إذا لم يكن فضاء هيلبرتي H تاما فإننا نستطيع تتميمه بايجاد فضاء نظيمي يحوى H كما فعلنا في ‎83.12‎ . لنثبت ان تتمة فضاء هيلبرتي ليست فضاء نظيمياً فحسب بل هي أيضا فضاء هيلبرتي. لرؤية ذلك علينا أن نعرف في التتمة عملية ضرب سلمي بحيث تتحقق المسلمات ‎14.12‎ أ ـ د (في الحالة الحقيقية) أو المسلمات ‎44.12‎ أ ـ د (في الحالة العقدية).

كنا عرفنا كل عنصر X من تتمة فضاء نظيمي R على انه رمز يوافق صف متتاليات كوشية متحدة النهاية من الفضاء R . ليكن X وَ Y عنصرين كيفيين من التتمة $\bar{H}$ لفضاء هيلبرتي H ، ولتكن $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ متتاليتين كوشيتين تنتميان الى الصفين X وَ Y على التوالي. لنثبت ان للاعداد (x_n, y_n) نهاية لما $n \to \infty$. لدينا :

$$|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| = |(x_n - x_m, y_n) + (x_m, y_n - y_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| \, \|y_n\| + \|x_m\| \, \|y_n - y_m\|.$$

بما أن المتتاليتين الكوشيتين $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ محدودتان (‎17.3‎ ـ ج) فإن الكمية المحصل عليها تؤول الى الصفر لما $m \to \infty$ وَ $n \to \infty$، وهو ما يجعل المتتالية العددية (x_n, y_n) تحقق مقياس كوشي. ينتج من ذلك

انها تقبل نهاية. إن هذه الاخيرة لا تتعلق باختيار المتتالية $\{x_n\}$ في الصف X والمتتالية $\{y_n\}$ في الصف Y ، إذا كانت $\{x'_n\}$ وَ $\{y'_n\}$ متتاليتين اخريين في الصفين المعتبرين فإن:

$$|(x'_n, y'_n)-(x_n, y_n)| = |(x'_n - x_n, y'_n)-(x_n, y'_n - y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \| x'_n - x_n \| \| y'_n \| + \| x_n \| \| y'_n - y_n \| \to 0,$$

لما $n \to \infty$ ، وهو الامر الذي يجعل المتتاليتين العدديتين (x'_n, y'_n) وَ (x_n, y_n) يقبلان نفس النهاية. نضع الآن:

$$(X, Y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n).$$

كنا رأينا بان العدد (X, Y) معين تماما بالصفين X وَ Y بدون ان يتعلق باختيار المتتاليتين $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ في هذين الصفين بصفة خاصة، فإن العدد $\| x_n \| \lim_{n\to\infty} = \sqrt{(x_n, x_n)} \lim_{n\to\infty} = \sqrt{(X, X)}$ يطابق نظيم الصف X في الفضاء النظيمي $\bar{H}$. وبالتالي فإن المسلمات 12 .14 ب ـ د (أو 12 .44 ب ـ د في الحالة العقدية) محققة بالانتقال الى النهاية في المسلمات المتوالية في الفضاء H. لدينا على سبيل المثال في الحالة الحقيقية:

$$(Y, X) = \lim_{n\to\infty} (y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (X, Y),$$

نتأكد من المسلمات الأخرى بطريقة مماثلة.

12 .84 . الفضاءات شبه الهيلبرتية.

أ. يحدث أحيانا، بخصوص فضاء شعاعي L (نفرضه حقيقياً لتثبيت فكر القارىء)، اننا نستطيع ادخال تابع (x, y) يحقق المسلمات 12 .14 ب ـ د ولا يحقق المسلمة 12 . 14 ـ أ: توجد عناصر $z \neq 0$ بحيث $(z, z) = 0$. يسمى مثل هذا الفضاء فضاء شبه هيلبرتي. يتبين انه بالامكان الانتقال من الفضاء L الى فضاء النسبة L/E (12 .41 ـ ع) الذي يمكن اعتباره فضاء هيلبرتياً.

ب. نختار E مساويا لمجموعة شكل العناصر z بحيث $(z, z) = 0$. إذا كان $(z, z) = 0$. وَ $y \in L$ كيفياً فإن متراجحة كوشي ـ بونياكوفسكي،

الذي يعتمد برهانها على المسلمات 14.12 ب ـ د، تعطي:

$$|(z, y)| \leqslant \sqrt{(z, z)}\sqrt{(y, y)} = 0, \quad (1)$$

بحيث ان $(z, y) = 0$ من اجل كل $y \in L$.

لنثبت ان E فضاء جزئي من L. إذا كان $z_1 \in E$، $z_2 \in E$، فإن المتراجحة (1) تعطي:

$$(z_1 + z_2, z_1 + z_2) = (z_1, z_1) + 2(z_1, z_2) + (z_2, z_2) = 0,$$

إذن $z_1 + z_2 \in E$. من البديهي أيضا أن $(z_1, z_1) = 0$ تستلزم:

$$(\alpha z_1, \alpha z_1) = \alpha^2 (z_1, z_1) = 0,$$

أي أن $\alpha z_1 \in E$ بمجرد انتماء $z_1 \in E$. وبالتالي فإن المجموعة E فضاء جزئي في L.

نشكل فضاء النسبة $H = L/E$ ونزوده بالجداء السلمي:

$$(X, Y) = (x, y)$$

حيث $x \in X$، $y \in Y$ مختارين كيفياً. لنبين في البداية ان التعريف المعطى للجداء السلمي لا يتعلق باختيار العنصرين x وَ y في الصفين (X, Y) على التوالي. ليكن $x_1 \sim x$، $y_1 \sim y$ بحيث $x_1 = x + z$، $y_1 = y + u$، $z \in E$، $u \in E$ عندئذ يتبين من (1) ان لدينا:

$$(x_1, y_1) = (x, y) + (z, y) + (x, u) + (z, u) = (x, y)$$

وهو المطلوب.

لنتأكد من المسلمات 12 14 أ ـ د من اجل الفضاء H. إذا كان $(X, X) = 0$ فإن $(x, x) = 0$ من اجل كل $x \in X$، إذن X يطابق الصف E الذي يمثل الصفر للفضاء L/E (41.12 ـ ع) وبذلك نتأكد من المسلمة 14.12 ـ أ. فيما يتعلق بالمسلمات الاخرى فهي تنتج من المسلمات المتوالية للفضاء L ومن التعريف (2). وهكذا يتضح أن الفضاء $H = L/E$ فضاء هيلبرتي.

ج . يمكن انجاز انشاء مماثل تماما للسابق باعتبار فضاء شبه هيلبرتي عقدي L : إذا كانت E هي مجموعة العناصر $z \in L$ التي تحقق: $(z, z) = 0,$ فإن $H = L/E$ فضاء هيلبرتي عقدي.

د . في سياق الامثلة نعتبر الفضاء الشعاعي الحقيقي ($G(a, b)$ المؤلف من كل التوابع المستمرة بتقطع على مجال $[a, b]$ المزود بالجداء السلمي:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

إن المسلمات 14.12 .ب ـ د محققة اما المسلمة 14.12 ـ أ فلا لأن لدينا ، فيما يتعلق بتابع $z(t) \in G$ منعدم اينما كان باستثناء عدد منته من النقاط.:

$$(z(t), z(t)) = \int_a^b z^2(t)\, dt = 0 \tag{3}$$

وهذا حسب 61.9 ـ ج ، على الرغم من ان $z(t)$ ليس صفر الفضاء.G .
وبالتالي فإن G ليس فضاء هيلبرتيا بل شبه هيلبرتي. يمكن الوصول الى فضاء هيلبرتي بالإنتقال من الفضاء G الى فضاء النسبة G/E حيث E هي مجموعة كل التوابع $z(t) \in G$ التي تحقق المساواة (3): انها التوابع التي لا تختلف عن الصفر الا في عدد منته من النقاط (61.9 ـ د). يتشكل فضاء النسبة G/E من صفوف التوابع $x(t) \in G$ ، يكون تابعان في نفس الصف إذا لم يختلفا الا في عدد منته من النقاط.

ر . إن الانتقال من الفضاء شبه الهيلبرتي العقدي $G[a, b]$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة بتقطع على المجال $[a, b]$. ، المزود بالجداء السلمي:

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

الى فضاء النسبة الهيلبرتي العقدي G/E على الفضاء الجزئي E المؤلف من التوابع العقدية التي لا تختلف عن الصفر الاّ في عدد منته من النقاط، يتم بطريقة مماثلة.

سنواصل دراسة الفضاءات الهيلبرتية في الفصل 14 باعتبار جوانبها التطبيقية في التحليل.

ع 12 .5. التقريبات في فضاء التوابع المستمرة على متراص.

12 .15. إن الفضاء $R^s(Q)$ ($C^s(Q)$ على التوالى) المؤلف من التوابع الحقيقية (العقدية على التوالي) المستمرة على متراص Q فضاء شعاعي (12 .31 ع ـ ق) نظيمي (12 .23 ـ أ، 12 .93 ـ د) وتام (12 .32 ـ س). سنعتبر جماعة خطية مختلفة $B(Q)$ مؤلفة من التوابع الحقيقية (العقدية على التوالى) المستمرة على متراص Q. ماهي الشروط التي ينبغي فرضها على الجماعة $B(Q)$ لكي يكون الملاصق بالنسبة للتقارب المنتظم على المتراص Q، أي بالنسبة لنظيم الفضاء $R^s(Q)$ ($C^s(Q)$ على التوالي) محتويا لكل التوابع المستمرة على Q؟

أ. نقول عن جماعة $B(Q)$ من التوابع إنها تفصل نقطتين z وَ y من المجموعة Q إذا وجد في $B(Q)$ تابع $\varphi(x)$ بحيث $\varphi(z) \neq \varphi(y)$ تابع فاصل للنقطتين z وَ y). يعني القول ان $B(Q)$ لا يفصل النقطتين z وَ y ان $f(z) = f(y)$ مهما كان التابع $f(x) \in B(Q)$. وفي الحالة الاخيرة فإن ملاصق الجماعة $B(Q)$ لا يمكن ان يحوي كل التوابع المستمرة إذ أن المساواة الواردة آنفا تبقى قائمة عند الانتقال الى ملاصق الجماعة $B(Q)$ بالنسبة للتقارب المنتظم. على سبيل المثال فهو لا يحوى التابع $\rho(x, y)$ المنعدم من اجل $x = y$ وغير المنعدم من اجل $x = z$. إذن إذا أردنا أن يحوي ملاصق جماعة $B(Q)$ كل التوابع المستمرة على المتراص Q، فإن علينا أن نفرض بانها تفصل اية نقطتين من المتراص Q.

ب. نقول عن جماعة خطية $B(Q)$ من التوابع الحقيقية على المجموعة Q إنها شبكة خطية إذا احتوت المجموعة $B(Q)$ التابع $|f(x)|$ عند احتوائها التابع $f(x)$.

لدينا من اجل كل عددين حقيقيين α وَ β:

$$\max\{\alpha, \beta\} + \min\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta,$$
$$\max\{\alpha, \beta\} - \min\{\alpha, \beta\} = |\alpha - \beta|.$$

وبالتالي لدينا، من اجل كل تابعين حقيقيين $f(x)$، وَ $g(x)$:

$$\max\{f(x), g(x)\} + \min\{f(x), g(x)\} = f(x) + g(x),$$
$$\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\} = |f(x) - g(x)|.$$

بحل هذين المعادلتين بالنسبة لِـ $\max\{f(x), g(x)\}$ وَ $\min\{f(x), g(x)\}$ نرى ان شبكة خطية تحوى التابعين $\max\{f(x), g(x)\}$ وَ $\min\{f(x), g(x)\}$ عندما ينتمي اليها التابعين $f(x)$ وَ $g(x)$. ثم نستخلص بسهولة، بالتدريج، أنه إذا احتوت شبكة خطية توابع $f_1(x), \ldots, f_n(x)$، فإنها تحتوي أيضا التابعين $\max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ وَ $\min\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$.

ج. **نظرية.** إذا فصلت شبكة خطية $B(Q)$ على متراص Q اية نقطتين من المتراص واحتوت التابع $e(x) \equiv 1$ فإنها كثيفة اينما كان في فضاء كل التوابع المستمرة على Q .

البرهان. إن كل شبكة خطية $B(Q)$ تحوي 1 وتفصل نقطتين z وَ y تحوي بالضرورة كل تابع يأخذ عند النقطتين z وَ y اية قيمتين معطاتين، قد نجد مثل هذا التابع على الشكل $a\varphi(x) + b\cdot 1$، حيث $\varphi(x)$ تابع من $B(Q)$ يفصل النقطتين z وَ y اما a وَ b فثابتان.

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى و $f(x)$ تابعا مستمرا. مهما كانت النقطتان z y (مختلفتان أو غير مختلفتين) يمكن ايجاد حسب ما قلناه آنفا تابع $\varphi_{zy}(x) \in B(Q)$ حقق $\varphi_{zy}(z) = f(z)$، $\varphi_{zy}(y) = f(y)$.

ليكن:

$$U_{zy} = \{x \in Q : \varphi_{zy}(x) < f(x) + \varepsilon\} .$$

إن المجموعة U_{zy} مفتوحة وتحتوي النقطتين z وَ y . لنثبت z ، عندئذ تشكل المجموعات المفتوحة U_{zy} المعتبرة من اجل كل العناصر

$y \ni Q$ تغطية للمتراص Q . يأتي من التوطئة 79.3 اننا نستطيع استخراج تغطية منتهية $U_{zy_m}, \ldots, U_{zy_1}$. نعتبر التابع :

$$\varphi_z(x) = \min\{\varphi_{zy_1}(x), \ldots, \varphi_{zy_m}(x)\}$$

المنتمي الى الشبكة الخطية $B(Q)$ بما ان هناك على الاقل متراجحة واحدة قائمة من المتراجحات التي تعرف الساحات U_{zy_k} ، من اجل كل $x \ni Q$ ومن اجل z مثبت ، فإن لدينا : $\varphi_z(x) \equiv \min\limits_k \varphi_{zy_k} < f(x) + \varepsilon$ من اجل كل $x \ni Q$. لدينا في نفس الوقت $\varphi_z(z) = \min\limits_k \varphi_{zy_k}(z) = f(z)$. نضع

$$V_z = \{x \in Q : \varphi_z(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

إن المجموعة V_z مفتوحة وتحوي النقطة z . تشكل المجموعات V_z من اجل كل العناصر $z \ni Q$ تغطية للمتراص Q . يمكن حسب التوطئة 79.3 أن سنستخرج منها تغطية منتهية: $V_{z_1}, \ldots, V_{z_n}$

نضع الآن: $\varphi(x) = \max\{\varphi_{z_1}(x), \ldots, \varphi_{z_n}(x)\}$

ينتمي هذا التابع أيضا الى الشبكة الخطية $B(Q)$ ، ولدينا انشاء :

$$\varphi(x) = \max\limits_j \varphi_{z_j}(x) < f(x) + \varepsilon$$

ثم هناك على الاقل متراجحة قائمة من المتراجحات التي تعرف الساحة V_{z_j} وهذا من اجل كل نقطة $x \ni Q$ ، إذن:

$$\varphi(x) = \max \varphi_{z_j}(x) > f(x) - \varepsilon$$

في الختام لدينا من اجل كل $x \ni Q$:

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$$

وهذا ما يثبت النظرية.

(تسقط النظرية لو نتجاهل الفرض $\varepsilon(x) \equiv 1 \in B(Q)$: لتكن z و y' نقطتين معطاتين، إن الشبكة الخطية المؤلفة من كل التوابع المستمرة

$f(x)$ التي تحقق الشرط $f(z) = 2f(y)$ ليست كثيفة اينما كان في الفضاء $R^s(Q)$.) .

25. 12 . نظرية ستون (Stone).

أ . طبقا للتعريف العام لجبر (81. 12 ـ أ)، فإن كل جماعة خطية $B(Q)$ مؤلفة من التوابع (الحقيقية) على متراص Q تسمى جبراً إذا احتوت الجماعة $B(Q)$ التابع $f(x)\,g(x)$ عند احتوائها تابعين كيفيين $f(x)$ وَ $g(x)$.

ب . توطئة . إن الجبر الحقيقي $B(Q)$ الذي يحوي الوحدة والمغلق بالنسبة للتقارب المنتظم يمثل شبكة خطية.

البرهان. لنثبت ان التابع $|f(x)|$ ينتمي الى الجبر $B(Q)$ بمجرد انتماء $f(x)$ له. بدون المس بعمومية النتيجة يمكن وضع $\max_x |f(x)| = 1$.

نعتبر سلسلة التايلور:

$$(1-\xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\xi^2}{1\cdot 2} - \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}(-\xi)^n + \dots$$

رأينا في 25. 9 ـ د (يجب وضع $\alpha = 1/2$) وفي 56. 6 انها سلسلة متقاربة بانتظام من اجل $0 \leqslant \xi \leqslant 1$

بما ان المتراجحة $0 \leqslant f^2(x) \leqslant 1$ محققة على المتراص Q، لدينا حسب ما رأيناه أعلاه:

$$|f(x)| = \sqrt{1-(1-f^2(x))} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(1-f^2(x)) - \frac{1}{8}(1-f^2(x))^2 + \dots,$$

حيث سلسلة الطرف الايمن سلسلة متقاربة بانتظام على Q . بما ان الجبر $B(Q)$ مغلق بالنسبة للتقارب المنتظم فإن $|f(x)| \in B(Q)$ ، وهو المطلوب.

ج . نظرية ستون، (الخاصة بجبر حقيقي). إن كل جبر $B(Q)$ مؤلف من توابع حقيقية ويفصل اية نقطتين من المتراص Q ويحوي الوحدة، كثيف أينما كان في الفضاء $R^s(Q)$.

البرهان. نرمز بـ $\overline{B(Q)}$ لملاصق الجبر $B(Q)$ بالنسبة للتقارب المنتظم. بطبيعة الحال فإن الجماعة $\overline{B(Q)}$ تمثل أيضا جبراً: إذا كان $f_n(x) \to f(x)$ (بانتظام على Q) وكان $g_n(x) \to g(x)$ (بانتظام على Q) فإن: $f_n(x)\, g_n(x) \to f(x)\, g(x)$ (بانتظام على Q) الامر الذي يجعل $f(x)\, g(x) \in \overline{B(Q)}$ ناتجة من: $f(x) \in \overline{B(Q)}$ و $g(x) \in \overline{B(Q)}$

إن الجبر $\overline{B(Q)}$ شبكة خطية (التوطئة ب) وكثيف اينما كان في الفضاء $R^s(Q)$ (النظرية 12 .15 ـ ج).بما أن الجبر $\overline{B(Q)}$ مغلق فإن $\overline{B(Q)} = R^s(Q)$ ، وهو المطلوب.

12 .35 . أ . قد نعتقد ان كل جبر مؤلف من توابع ذات قيم عقدية جبر كثيف اينما كان في الفضاء $C^s(Q)$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة على Q شريطة ان يفصل اية نقطتين من المتراص Q وان يحوي الوحدة. إن هذا الاعتقاد خاطئاء إن صيغ على هذا النحو (راجع التمرين 5).

ب. لكن إذا تحقق لدينا شرط اضافي فإن نظرية ستون تمل جبور التوابع ذات القيم العقدية. نقول عن جبر عقدي $B(Q)$ إنه متناظر إذا احتوى التابع $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ عند احتوائه التابع المرافق: $\overline{\varphi}(x) = u(x) - iv(x)$.

نظرية ستون. (الخاصة بجبر عقدي). إن كل جبر متناظر $B(Q)$ مؤلف من توابع ذات قيم عقدية يفصل اية نقطتين من المتراص Q ويحوي الوحدة هو جبر كثيف اينما كان اي الفضاء $C^s(Q)$.

البرهان. يحوي الجبر $B(Q)$ ، فرضاً، التابعين $u(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \bar{\varphi}(x)]$ و $v(x) = \frac{1}{2i}[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)]$ بمجرد احتوائه تابعا من الشكل $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$. نرمز بـ $B_R(Q)$ للجبر الجزئي المؤلف من التوابع الحقيقية $h(x) \in B(Q)$. يفصل هذا الجبر الجزئي اية نقطتين y و z من المتراص Q (إذا كان $\varphi(y) \neq \varphi(z)$ فإن لدينا اما $u(y) \neq u(z)$ أو $v(y) \neq v(z)$) ويحوي الوحدة. لدينا من نظرية ستون 12 .25 $\overline{B_R(Q)} = R^s(Q)$ ومنه $\overline{B(Q)} = C^s(Q)$.

12 .45 . نتائج من نظريتي ستون.

أ. نفرض أن المتراص Q جزءا مغلقا ومحدودا من R_n وان الجبر $B(Q)$ مؤلف من كل كثيرات الحدود الحقيقية $p(x_1, \ldots, x_n)$. إن كل فروض نظرية ستون 12 .25 ـ ج محققة طبعاً. بتطبيق هذه النظرية نتوصل الى النظرية التالية:

نظرية (فيرشتراس). إن كل تابع حقيقي $f(x)$ مستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة $Q \subset R_n$ تساوي النهاية المنتظمة على لمتتالية كثيرات حدود لـ $x_1, \ldots, x_n$.

ب. بخصوص الجبر $B(Q)$ المؤلف من كثيرات الحدود $p(x_1, \ldots, x_n)$ ذات القيم العقدية فإن فروض نظرية ستون 12 .35 ـ ب محققة، وبالتالي يكون كل تابع ذي قيم عقدية $f(x)$ مستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة $Q \subset R_n$ نهاية منتظمة على Q لمتتالية كثيرات حدود ذات قيم عقدية) لـ $x_1, \ldots, x_n$

ج. بصفة خاصة، فإن كل تابع (حقيقي أو عقدي) مستمر على مجال مغلق $a \leqslant x \leqslant b$ نهاية منتظمة لمتتالية كثيرات حدود (حقيقية أو عقدية على التوالي).

د. نفرض الآن ان المتراص Q هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في مستوى $x\,y$. إن موقع كل نقطة على هذه الدائرة معين بالزاوية القطبية φ . نختار

الجبر $B(Q)$ مجموعة كثيرات الحدود المثلثية ذات المعاملات الحقيقية:

$$p(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \qquad (1)$$

تستلزم دساتير ضرب التوابع المثلثية (36.5) التي يمكن كتابتها على الشكل:

$$2\cos k\varphi\cos m\varphi=\cos(k-m)\varphi+\cos(k+m)\varphi,$$
$$2\cos k\varphi\sin m\varphi=\sin(m-k)\varphi+\sin(m+k)\varphi,$$
$$2\sin k\varphi\sin m\varphi=\cos(k-m)\varphi-\cos(k+m)\varphi$$

ان مجموعة التوابع (1) تحوي، عند احتواء تابعين كيفيين، جداء هذين التابعين وبالتالي فهي بالفعل جبر. إن كل نقطتين φ_1 وَ φ_2 منفصلتان بتابع من الجبر $B(Q)$، وبصفة خاصة، بـ $\sin\varphi$ وَ $\cos\varphi$ وَ . بتطبيق نظرية ستون 25.12 ـ ج نحصل على صيغة أخرى للنظرية أ:

نظرية (فايرشتراس). إن كل تابع حقيقي $f(\varphi)$ مستمر على الدائرة Q يساوي النهاية المنتظمة لمتتالية من كثيرات حدود مثلثية (1) معاملاتها حقيقية.

ر. نختار على المستقيم الحقيقي تابعا حقيقيا $g(t)$ مستمرا ودورياً دورته 2π، بطبيعة الحال يمكننا وصل هذا التابع بتابع مستمر على الدائرة Q بوضع $f(\varphi)=g(\varphi+2k\pi)$ من اجل كل k. وبالعكس، يمكننا وصل كل تابع $f(\varphi)$ مستمر على الدائرة Q، بواسطة الدستور $g(t+2k\pi)=f(t)$، بتابع $g(t)$ مستمر على كل المستقيم الحقيقي. إذن، تكتب النظرية د على الشكل التالي:

نظرية. إن كل تابع حقيقي $g(t)$ مستمر ودوري دورته 2π على محور نهاية منتظمة (على كل المحور) لمتتالية كثيرات حدود مثلثية.

س. إن الصيغة العقدية للنظريتين أ وَ د اكثر بساطة إذا ما نظرنا اليها من زاوية اعينة. انطلاقاً من دستوري أولر (36.8):

$$\cos k\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}\right),$$
$$\sin k\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}\right),$$

يمكن تعويض كثيرات الحدود (1) بكثيرات الحدود:

$$(2) \quad q(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}.$$

تأتي النتيجة القائلة ان كثيرات الحدود (2) تشكل جبراً من قواعد ضرب التابع الاسي. ويأتي تناظر هذا الجبر من المساواة $\overline{\sum c_k e^{ik\varphi}} = \sum \overline{c_k} e^{-ik\varphi}$. ان كل نقطتين φ_1 وَ φ_2 من الدائرة Q منفصلتان بالتابع $e^{i\varphi}$. تقودنا النظرية 12 .35 ـ ب الى النتيجة التالية:

نظرية. إن كل تابع ذي قيم عقدية مستمر على الدائرة Q (أو، وهذا يعني نفس الشيء، كل تابع مستمر دورته 2π على المحور$-\infty < t < \infty$) يساوي النهاية المنتظمة لمتتالية كثيرات حدود مثلثية عقدية من الشكل (2).

12 .55 . متتاليات على شكل دلتا. ان نظرية ستون التي تبين امكانية تقريب تابع مستمر بتوابع جبر $B(Q)$ لا تشير لأية طريقة انشاء للتوابع المقاربة. نشير هنا الى بعض الطرق العملية للتقريبات.

بما اننا نستعمل فيا يلي المكاملة فإننا نفرض ان المتراص Q مجال مغلق من المستقيم العددي أو الدائرة ذات نصف القطر 1 (المجال $[-\pi, \pi]$ حيث يطابق بين طرفيه).

أ. نرمز بـ $U_\rho(y)$ للمجال المفتوح الذي طوله 2ρ ومركزه عند النقطة y . نفرض انه توجد، من اجل نقطة $y \in Q$ معطاة، متتالية توابع غير سالبة $D_n(x; y)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ تتمتع بالخاصيتين التاليتين:

$$0 < \rho \quad \int_{U_\rho(y)} D_n(x; y)\, dx \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 1 \quad (1$$

$$0 < \rho \quad \int_{Q-U_\rho(y)} D_n(x; y)\, dx \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \quad (2$$

نقول عن مثل هذه المتتالية إنها في شكل دلتا (من اجل النقطة y). سيأتيك شرح لمصدر هذا اللفظ بعد حين).

ب. **نظرية**. لتكن $D_n(x; y)$ متتالية في شكل دلتا من اجل نقطة y ، إذا كان $f(x)$ تابعا مستمرا بتقطع ومستمرا عند النقطة y فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q D_n(x;\ y) f(x)\, dx = f(y).$$

البرهان. ليكن $M = \sup |f(x)|$. من اجل $\varepsilon > 0$ معطي نختار $\delta > 0$ بحيث $\rho(x,\ y) \leqslant \delta$ تستلزم $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. ثم إن لدينا:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_Q D_n(x;\ y) f(x)\, dx - f(y) \right| = \\
&= \left| \int_Q D_n(x;\ y) [f(x) - f(y)]\, dx + f(y) \left[\int_Q D_n(x;\ y)\, dx - 1 \right] \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_{U_\delta(y)} D_n(x;\ y) |f(x) - f(y)|\, dx + \int_{Q - U_\delta(y)} D_n(x;\ y) |f(x) - \\
&- f(y)|\, dx + |f(y)| \left| \int_Q D_n(x;\ y)\, dx - 1 \right| \leqslant \varepsilon \int_{U_\delta(y)} D_n(x;\ y)\, dx + \\
&+ 2M \int_{Q - U_\delta(y)} D_n(x;\ y)\, dx + M \left| \int_Q D_n(x;\ y)\, dx - 1 \right|.
\end{aligned} \tag{1}$$

ينتج من الخاصيتين 1) وَ 2) لمتتالية في شكل دلتا ان المقدار المحصل اليه اعلاه اصغر من 2ε ، وهذا من اجل n كبير بكفاية، وهو المطلوب.

ج. نلاحظ الآن انه إذا كان التابع $D_n(x; y)$ مستمرا بالنسبة لمجموعة المتغيرين $x \in Q$ ، $y \in Q$ وإذا كان $f(x)$ مستمرا بتقطع فإن:

$$f_n(x) = \int_Q D_n(x;\ y) f(y)\, dy$$

تابع مستمر على Q . ذلك أن:

$$\begin{aligned}
|f_n(x') - f_n(x'')| &= \left| \int_Q [D_n(x';\ y) - D_n(x'',\ y)] f(y)\, dy \right| \leqslant \\
&\leqslant M \int_Q |D_n(x';\ y) - D_n(x'';\ y)|\, dy,
\end{aligned} \tag{٤}$$

وعندما نجد، من اجل $\varepsilon > 0$، عدداً $\delta > 0$ بحيث تنتج من المتراجحة $|x' - x''| < \delta$ المتراجحة:

$$|D_n(x' ; y) - D_n(x'' ; y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi M}$$

من اجل كل $y \ni Q$، فإن لدينا حسب (2):

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant \varepsilon$$

وهو المطلوب.

د . نختم النظرية بالملاحظة التالية حول التقارب المنتظم. من الواضح باديء ذي بدء انه إذا تحققت الخاصيتان 1) وَ 2) من اجل كل نقطة y من مجموعة جزئية $E \subset Q$ وإذا كان التابع $f(x)$ مستمرا عند كل نقطة $y \ni E$ فإن النتيجة ب قائمة من اجل كل نقطة $y \ni E$.

نقول عن العلاقتين 1) وَ 2) انهما **محققتان بانتظام على مجموعة** $E \subset Q$ إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد عدد طبيعي N بحيث لا تتجاوز الفروق بين الطرف الايسر من 1) والطرف الايمن من 2)، بالطويلة، العدد ε مهما كان $n \geqslant N$ وَ $y \ni E$.

نقول عن تابع $f(x)$ إنه مستمر بانتظام على E بالنسبة لـ Q إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta > 0$ بحيث نستخلص من صحة $|x - y| \leqslant \delta$ من اجل $x \ni Q$ وَ $y \ni E$ صحة $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

تنتج في هذه الحالة النظرية التالية من التقديرات (3):

نظرية. إذا تحققت العلاقتان 1) وَ 2) من اجل كل $\rho > 0$ بانتظام على مجموعة E وكان التابع مستمرا بانتظام على E بالنسبة لـ Q فإن التوابع $f_n(x)$ (2) متقاربة بانتظام على E نحو التابع $f(x)$ عندما يؤول n الى ∞ .

ر . بتطبيق النظرية د يمكننا استخدام القياس التالي المتعلق بالاستمرار المنتظم لتابع $f(x)$ على مجموعة E بالنسبة لـ Q :

توطئة. يكون تابع $f(x)$ ، على مجموعة مغلقة $E \supset Q$ من نقاط استمرار هذا التابع، مستمرا بانتظام بالنسبة لـِ Q .

البرهان. ينتج من نظرية هاين (71.5 ـ ب) ان التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على E ونستطيع، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta_0 > 0$ بحيث يأتي من $|y - z| < \delta_0$، $y \in E$، $z \in E$ المتراجحة $|f(y) - f(z)| < \varepsilon/2$. نختار بعد ذلك، من اجل كل نقطة $y \in E$، مجالا $|x - y| < \delta(y) \leqslant \delta_0/2$ تتحقق فيه المتراجحة $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ ، ثم بتطبيق 79.3 نستخرج من التغطية المحصل عليها للمجموعة $\bar{E}$ تغطية منتهية $|x - y_1| < \delta_1$، ...، $|x - y_n| < \delta_n$. ليكن $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. عندئذ، مهما كان $x \in Q$، $y \in E$ بحيث $|x - y| < \delta$ يمكننا ايجاد نقطة y_k حيث $|x - y_k| < \delta_k$، فنحصل على:

$$|y_k - y| < |y_k - x| + |x - y| < \delta_k + \delta \leqslant \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0$$

وَ:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(y_k)| + |f(y_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهو المطلوب.

س. ها هي صيغة اخرى معززة للنظرية ب: إن كانت $D_n(x; y)$ متتالية في شكل دلتا من اجل نقطة y وإن كان $f(x)$ مستمرا عن د $x = y$ فإن لدينا، من اجل كل متتالية $y_n \to y$:

$$\lim_{n \to \infty} \int_Q D_n(x;\ y_n) f(x)\, dx = f(y).$$

يتم البرهان بالقيام بنفس الحسابات مع تدقيق اكثر للتقديرات.

ص. نعتبر مرة اخرى الحالة التي يكون فيها الوسيط غير المتصل n معوضا بوسيط مستمر t . ليكن $D(t, x, y)$ تابعا غير سالب لثلاثة متغيرات، يتجول x وَ y في المتراص Q ويتجول t في مجال $0 < t \leqslant b$ ؛ نفرض أن الشرطين:

$$\lim_{t\to 0} \int_{|x-y|\leqslant\rho} D(t, x, y)\, dx = 1 \quad (1$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{|x-y|\geqslant\rho} D(t, x, y)\, dx = 0 \quad (2$$

محققان من اجل كل $\rho > 0$.

عندئذ إذا تعاطينا، من اجل كل t، مقدارا $y(t)$ يؤول الى النهاية y عندما $t \to 0$ فإن:

$$\lim_{t\to 0} \int_Q D(t, x, y(t))\, f(x)\, dx = f(y)$$

نثبت هذه المساواة بنفس الحسابات الواردة في حالة النظرية ب (بمراعاة الملاحظة س). يمكننا القول بان التابع:

$$F(t, y) = \int_Q D(t, x, y)\, f(x)\, dx \qquad (0 < t \leqslant b,\ y \in Q)$$

المعرف عند $t = 0$ بالشرط:

$$F(0, y) = f(y)$$

تابع مستمر في الساحة المغلقة: $0 \leqslant t \leqslant b$، $y \in Q$.

ط. نستطيع اهمال الشرط القائل إن $D_n(x; y)$ (أو $D(t, x, y)$ في ص) غير سالب بتعويضه بالشرط

$$\int_Q |D_n(x;\ y)|\, dx \leqslant c \qquad (4)$$

$$\left(\text{أو } \int_Q |D(t, x, y)|\, dx \leqslant c\right)$$

حيث c لا يتعلق بـ n. إن الشرط (4) اساسي ولولاه لسقطت النظرية، ذلك ما سنراه في الفصل 14.

ع. ملاحظة. إن مصدر «متتالية في شكل دلتا» هو «التابع دلتا» لديراك (Diric). عرّف ب. ديراك في كتابه «مبادىء الميكانياكا الكمية» سنة 1930 «التابع دلتا» $\delta(x)$ كتابع على المحور $-\infty < x < \infty$ منعدم اينما كان باستثناء النقطة $x = 0$ يتمتع بالخاصية التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \qquad (5)$$

ثم « برهن » على النظرية التالية: لدينا من أجـل كل تابـع مستمر عند $\xi = x$، المساواة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = f(x) \quad (6)$$

(كان « البرهان » بسيطا للغاية: التابع $\delta(x-\xi)$ منعدم من اجل $x \neq \xi$ ولذا فإن قيم التابع $f(\xi)$ ليست ذات اهمية من اجل $x \neq \xi$؛ بتعويض $f(\xi)$ بالثابت $f(x)$ وتطبيق (5) نتوصل الى (6).) إنه لا يوجد في التحليل الكلاسيكي أي تابع يتمتع بالخاصيات التي فرضها ديراك، فمحتوى نظريته في الواقع يشابه الى حد كبير النظرية ب. لم يتم العثور على شكل للتابع دلتا بـوصفـه كـائنـا ريـاضيـا الاّ بفضـل اعمال س. سـوبـولاف S. Sobolev (1935) و ل. شـوارتـز L.Sdixbsu1 (1947)، والواقع ان التابع دلتا ليس تابعا معتادا بل تابعا معمما (يسمى ايضا توزيعا أو توزيعة) (راجع مثلا [13]). يمثل التابع دلتا مثالاً متميزا على الحدس الرياضي الفائق لعالم فيزيائي، تجاوز المستوى الرياضي لعصره.

12 .65. استخدام المتتاليات ذات الشكل دلتا في إنشاء توابع مقاربة.

أ. نريد مقاربة تابع $f(y)$ معطى بتابع $f_n(y)$ ينتمي الى جبر $B(Q)$ يتم ذلك إذا تمكنا من ايجاد متتالية في شكل دلتا $D_n(x; y)$ بحيث:

$$f_n(y) = \int_Q D_n(x; y) f(x) dx \in B(Q)$$

ب. ليكن $Q = [0, 1]$ وليكن $B(Q)$ الجبر المؤلف من كل كثيرات الحدود المعرفة على $[0, 1]$. نضع، من اجل $n = 1, 2, \ldots$:

$$D_n(x; y) = C_n [1 - (x-y)^2]^n$$

حيث:

$$C_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt}, \quad (1)$$

ونبين أن $D_n(x;\, y)$ متتالية في شكل دلتا من اجل كل $y \ni (0,\, 1)$ بما ان التابع :

$$f_n(y) = C_n \int_0^1 [1-(x-y)^2]^n f(x)\, dx \qquad (2)$$

كثير حدود لـ y درجته $2n \geqslant$ (وهذا بديهي) فإننا نحصل على العبارة المتعلقة بكثيرات الحدود الملموسة التي تقارب التابع $f(y)$

ج. **توطئة**. لدينا من اجل كل $\rho \ni (0,\, 1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\rho^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} = 0$$

البرهان. ينتج من المتراجحات البسيطة:

$$\int_\rho^1 (1-t^2)^n\, dt < (1-\rho^2)^n (1-\rho) < (1-\rho^2)^n$$

$$\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt > \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

ومن العلاقة الخاصة بالنهاية (85.5 (4) و 73.4 ـ أ):

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)(1-\rho^2)^n = 0$$

لدينا كنتيجة لذلك: إن المساواة التالية محققة مهما كان $\rho \ni (0,\, 1)$ في :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\rho (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt} = 1$$

د. نتأكد الآن من خاصيات متتالية في شكل دلتا(55.12 أ وَ د) بخصوص تابع $D_n(x;\, y)$.

لدينا، بفضل التوطئة، من اجل كل $\rho \ni (0,\, 1)$:

$$\int_{\substack{|x-y|\geqslant\rho \\ 0\leqslant x\leqslant 1}} D_n(x;\, y)\, dx = C_n \int_{\substack{|x-y|\geqslant\rho \\ 0\leqslant x\leqslant 1}} [1-(x-y)^2]^n\, dx =$$

$$= C_n \int_{\substack{|t|\geqslant\rho \\ -y\leqslant t\leqslant 1-y}} (1-t^2)^n\, dt \leqslant 2C_n \int_\rho^1 (1-t^2)^n\, dt =$$

$$= \frac{\int_\rho^1 (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

وهذا ما يثبت بان الخاصية 2) محققة بانتظام على المجموعة $0 \leqslant y \leqslant 1$.

ثم لدينا ، من اجل $y \in [\rho_0, 1-\rho_0]$ ، $0 < \rho < \rho_0$:

$$\int\limits_{\substack{|x-y|\leqslant\rho \\ 0\leqslant x\leqslant 1}} D_n(x;\, y)\, dx = C_n \int\limits_{\substack{|x-y|\leqslant\rho \\ 0\leqslant x\leqslant 1}} [1-(x-y)^2]^n\, dx =$$

$$= C_n \int_{-\rho}^{\rho} (1-t^2)^n\, dt = \frac{\int_0^{\rho} (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt} \to 1 \qquad (n\to\infty),$$

وهـذا مـا يثبـت ان الخاصيـة 1) محققـة بـانتظـام على المجمـوعـة $\rho_0 \leqslant y \leqslant 1-\rho_0$.

تشكل كثيرات الحدود (2)، بفضل النظرية 12 .55 ـ ب وَ 12 .55 ـ بـ، متتالية متقاربة من اجل كل $y \ni (0, 1)$ وبانتظام على كل مجال: $[\rho_0,\ 1-\rho_0]$ ، $0<\rho_0$ ، نحو تابع $f(y)$ متستمر على $(0, 1)$.

نشير بهذا الصدد ان ذلك يثبت مباشرة نظرية فايرشتراس في المجال $[\rho_0,\ 1-\rho_0]$. بواسطة تمدد لهذا المجال يمكن تعميم البرهان على كل مجال $[a,\ b]$.

12 .75 أ . يمكننا انجاز انشاء مماثل يقودنا الى كثيرات الحدود المقاربة المثلثية . لتكـن φ الزاويـة القطبيـة التي تعين مـوقـع نقطـة على الدائـرة $Q=\{x^2+y^2=1\}$ وَ $B(\bar{Q})$ الجبر المؤلف من كثيرات الحدود المثلثية الحقيقية. نضع :

$$D_n(\varphi;\, \psi) = C_n \cos^{2n}\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$C_n = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt} \qquad (n=1,\, 2,\, \ldots) \tag{1}$$

ونبين أن $D_n(\varphi;\, \psi)$ متتالية في شكل دلتا من اجل كل . بما ان التابع:

$$f_n(\psi) = C_n \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\frac{\varphi-\psi}{2} f(\varphi)\, d\varphi \tag{2}$$

كثير حدود مثلثي لـِ ψ (درجته $\leqslant 2n$) فإننا نحصل على كثيرات الحدود المثلثية الملموسة المقاربة لـِ $f(\varphi)$.

ب. توطئة. لدينا من اجل كل $\rho \in (0, \pi/2)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt}{\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} = 0$$

البرهان. بما ان التابع $\cos t$ متناقص من أجل $0 \leqslant t \leqslant \pi/2,$ فإن:

$$\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right) \cos^{2n} \rho \leqslant \frac{\pi}{2} \cos^{2n} \rho$$

وبما أن محدب من الاعلى على المجال المعتبر فإن: $\cos t \geqslant 1 - 2t/\pi$
و:

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt \geqslant \int_{0}^{\pi/2} \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

وبالتالي يمكن ان نكتب، بمراعاة 65.5 :

$$\frac{\int_{\rho}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt}{\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} \leqslant \frac{2(2n+1)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cos^{2n} \rho \to 0$$

نحصل إذن على:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{0}^{\rho} \cos^{2n} t\, dt}{\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} = 1$$

من اجل كل $\rho \in (0, \pi/2)$.

ج. بفضل التوطئة ب، لدينا من أجل كل $\rho \in (0, \rho_0)$ ، $0 < \rho_0$:

$$\int_{|\varphi-\psi| \geqslant \rho} D_n(\varphi;\ \psi)\, d\varphi = C_n \int_{|\varphi-\psi| \geqslant \rho} \cos^{2n} \frac{\varphi - \psi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{\frac{\pi}{2} \geqslant |t| \geqslant \frac{\rho}{2}} \cos^{2n} t\, dt = \frac{\int_{\rho/2}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt}{\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

وهذا ما يثبت الخاصية 2) لمتالية في شكل دلتا (12 .55 أ). ثم لدينا من اجل كل $\rho \in (0, \rho_0)$ ، $0 < \rho_0$:

$$\int_{|\varphi-\psi|\leqslant\rho} D_n(\varphi;\ \psi)\,d\varphi = C_n \int_{|\varphi-\psi|\leqslant\rho} \cos^{2n}\frac{\varphi-\psi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 2C_n \int_{-\rho/2}^{\rho/2} \cos^{2n} t\,dt = \frac{\int_0^{\rho/2} \cos^{2n} t\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt} \to 1 \qquad (n \to \infty),$$

وهذا ما يثبت الخاصية 1). تشكل كثيرات الحدود المثلثية (2)، بفضل النظرية 12 .55 ـ د متتالية متقاربة نحو التابع $f(\varphi)$ بانتظام على كل مجموعة $E \subset Q$ تكون عليها هذا التابع مستمرا بانتظام بالنسبة لـ Q ، بصفة خاصة (12 .55 ـ ر)، على كل مجموعة مغلقة يكون عليها هذا التابع مستمراً.

د . ملاحظة. يمكن تقدير درجة كثير الحدود (الجبري أو المثلثي)، في كلتا الحالتين، الذي ينجز تقريب تابع $f(x)$ بتقدير عدد ε معطى، حسب الدستور (2) أو 12 .65(2). على الرغم من ان لكثيرات الحدود (2) أو 12 .65 (2) بنية بسيطة، فإنها لا تمثل عموما احسن كثيرات الحدود من درجة معطاة يبرهن على أنه يوجد من بين كثيرات الحدود ذات الدرجة n ، كثير حدود لا يختلف (على الاكثر) عن تابع $f(x)$ معطى مستمرا على مجال $[a, b]$ الآ بـِ $12\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$. يرمز هنا:

$$\omega(\delta) = \max_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|$$

لتذبذب التابع $f(x)$ على المجال $[a, b]$ (5 .71 ـ ج). بخصوص كثيرات الحدود المثلثية (على الدائرة Q) فإن التقدير السابق يعوض بـِ: $12\omega(1/n)$ (نظرية د. جاكسن Jackson راجع [9]).

§ 12 .6 اشتقاق ومكاملة التوابع التي تأخذ قيمها في فضاء نظيمي.

12 .16 . المشتق.

أ . ليكن $x(t)$ تابعا معرفا على مجال $a \leqslant t \leqslant b$ قيمة في فضاء شعاعي

نظيمي X حقيقي أو عقدي. نقول عن التابع $x(t)$ إنه يقبل الاشتقاق عند نقطة t_0 من $[a, b]$ إذا وجدت في الفضاء X النهاية:

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (1)$$

تسمى مشتق التابع $x(t)$ عند النقطة $t = t_0$.

ب. نقول عن التابع $x(t)$ إنه قابل للإشتقاق على كل المجال $[a, b]$ إذا وجد مشتق $x(t)$ عند كل نقطة من هذا المجال؛ يكون المشتق $x'(t)$ في هذه الحالة تابع معرف على المجال $[a, b]$ ، قيمة في X .

ج. ينتج من التعريف (1) انه إذا كان تابع $x(t)$ قابلا للإشتقاق عند كل نقطة t_0 فإن:

$$x(t) - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) + \varepsilon(t, t_0)(t - t_0)$$

حيث $\varepsilon(t, t_0)$ يؤول الى الصفر في الفضاء X عندما $t \to t_0$.

د. بصفة خاصة، فإن قابلية $x(t)$ للإشتقاق عند النقطة t_0 تستلزم استمراره عند هذه النقطة. إن كل تابع $x(t)$ قابل للإشتقاق على مجال $[a, b]$ تابع مستمر على هذا المجال.

نثبت بسهولة (كما هو الشأن في الحالة العددية) القواعد الرئيسية للإشتقاق:

ر. إن كان $x(t) = x_0$ عنصرا ثابتا من الفضاء X فإن $x'(t) \equiv 0$.

س. إذا كان $x(t)$ وَ $y(t)$ تابعين قابلين للإشتقاق قيمها في X فإن الامر كذلك فيما يخص $x(t) + y(t)$ ولدينا:

$$[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$$

ص. إذا كان $x(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق وقيمة في X وكان $\gamma(t)$ تابعا عدديا قابلا للإشتقاق فإن الجداء $\gamma(t)\, x(t)$ تابع قابل للإشتقاق قيمة في X ، ولدينا:

$$[\gamma(t)\, x(t)]' = \gamma'(t)\, x(t) + \gamma(t)\, x'(t) \quad (2)$$

وعلى وجه الخصوص: $[\alpha x(t)]' = \alpha x'(t)$

من اجل كل ثابت α .

ط . إذا كان $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ تابعا لـِ t قابلا للإشتقاق قيمه في الفضاء X وكان $t = t(\tau)$ تابعا عدديا قابلا للإشتقاق قيمه في المجال $[a, b]$ فإن $y(\tau) = x(t(\tau))$ تابع لـِ τ قابل للإشتقاق، ولدينا:

$$y'(\tau) = x'(t)\ '(\tau)$$

ع . ندخل الآن مفهوم مفاضلة تابع $x(t)$ قيمة في فضاء نظيمي. نقول عن شعاع $dx = x'(c)\, dt$ حيث $dt = \Delta t$ تزايد كيفي للوسيط t إنه **تفاضلية التابع الشعاعي** $x(t)$ عند $t = c$. وهكذا فإن تفاضلية تابع هي الجزء الخطي الرئيسي لتزايده عند تزايد المتغير t .

تبقى النظرية الخاصة بثبات تفاضلية تابع مركب قائمة: إن لتفاضلية التابع $x(t)$ نفس الشكل سواء كان t مستقلا أو كان تابعا لمتغير مستقل آخر τ (يمثل dt في الحالة الاخيرة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $t(\tau)$) . ذلك انه إذا كان $g(\tau) = x[t(\tau)]$ وكانت $d_\tau x$ هي تفاضلية التابع x بالنسبة للمتغير τ فإن لدينا حسب ص:

$$d_\tau x = g'(\tau)\, d\tau = x'(c)\, t'(\tau)\, d\tau = x'(c)\, dt = dx,$$

وهو المطلوب.

ف . سنبين فيما يلي (ق) القضية العكسية لـِ ر: كل تابع مشتقه يساوي التابع المنعدم هو تابع ثابت. قصد التعميم، نبين هذه النظرية في الحالة التي يكون فيها التابع $x(t)$ قابلا للإشتقاق بتقطع. من اجل ذلك ندخل التعريفين الدقيقين التاليين: نقول عن تابع $x(t)$ قيمه في الفضاء X إنه **مستمر يتقطع على مجال مغلق** $a \leqslant t \leqslant b$ إذا وجدت تجزئة $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ بحيث يكون $x(t)$ مستمرا في كل مجال (t_k, t_{k+1}) وقبل هذا التابع النهايات $x(t_k + 0)$ وَ $x_t(t_{k+1} - 0)$ (حيث: $k = 0, 1, \ldots, n-1$) ؛ كالمعتاد يمكن للتابع $x(t)$ ان يكون معرفا عند النقاط

t_k بالذات بأي شكل من الاشكال او حتى غير معرف عند هذه النقاط. ونقول عن التابع $x(t)$ إنه مرن بتقطع على $[a, b]$ إذا كان مستمرا على $[a, b]$ وقابلا لمشتق $x'(t)$ اينما كان في $[a, b]$ باستثناء عدد منته من النقاط، وكان هذا المشتق مستمرا بتقطع.

ق. نظرية. (القضية العكسية للخاصية ر). إذا كان $x(t)$ ، $t \in [a, b]$ ، تابعا مرنا بتقطع قيمه في فضاء نظيمي X وكان المشتق $x'(t)$ منعدما في كل نقطة موجوده فيه، فإن $x(t) \equiv x_0$ (حيث x_0 عنصر ثابت من الفضاء X).

البرهان. نفرض في البداية ان $x'(t) = 0$ اينما كان داخل المجال $[a, b]$. نثبّت نقطة $c \in (a, b)$ وعددا $\varepsilon > 0$. بما ان $x'(c) = 0$ فإنه يوجد جوار للنقطة c تتحقق فيه المتراجحة:

$$|x(t) - x(c)| \leqslant \varepsilon |t - c| \quad (3)$$

نرمز بـِ $T_\varepsilon(c)$ للمجموعة المؤلفة من كل العناصر $t > c$ والعناصر $t \in [c, b]$ التي لا تحقق المتراجحة (3). ليكن $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$ ونفرض ان $t_0 < b$. بما ان $x(t)$ مستمر فإن المتراجحة (3) المحققة بجوار النقطة t_0 تبقى كذلك عند النقطة t_0 نفسها. لما كان: $x'(t_0) = 0$ ، يوجد جوار للنقطة t_0 تتحقق فيه المتراجحة:

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} |t - t_0| \quad (4)$$

نختار $t > t_0$ تتحققه من اجله المتراجحة (4). ينتج من (3) وَ (4) أن:

$$|x(t) - x(c)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(c)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \varepsilon(t_0 - c) = \varepsilon\left(\frac{t - t_0}{2} + t_0 - c\right) < \varepsilon(t - c)$$

بحيث ان النقطة t لا تنتمي ايضا الى المجموعة $T_\varepsilon(c)$. وهذا يناقض المساواة $t_0 = \inf T_\varepsilon(c)$. وبالتالي $t_0 = b$ ولدينا:

$$|x(t) - x(c)| \leqslant \varepsilon(t - c)$$

وهذا من اجل كل $t \in [c, b]$.

بما أن ε كيفي، لدينا:

$$x(t) - x(c) = 0$$

وهذا من اجل كل $t \in [c, b]$ ، إذن $x(t) \equiv x(c)$

وهكذا يتضح ان التابع $x(t)$ ثابت على المجال (c, b) . بما اننا نستطيع اختيار النقطة c قريبة بالقدر الذي نريد من النقطة a فإن التابع $x(t)$ ثابت على كل المجال $[a, b]$.

نعتبر الآن الحالة العامة: يوجد على المجال $[a, b]$ عدد منته من النقاط، معبره انها $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$، لا يقبل فيها التابع $x(t)$ مشتقا؛ إن المقدار $x'(t)$ موجود ومنعدم في كل مجال (c_j, c_{j+1}) (حيث $(j = 0, \ldots, n-1)$).

يثبت الاستدلال السابق ان التابع $x(t)$ ثابت على كل مجال (c_j, c_{j+1}) $(j = 0, \ldots, n-1)$. بما ان التابع $x(t)$ مستمر على المجال $[a, b]$ فإن قيمه على المجالات المتجاورة (c_j, c_{j+1}) وَ (c_{j-1}, c_j) متساوية؛ ومنه يأتي ان $x(t)$ تابع ثابت على كل المجال $[a, b]$. انتهى برهان النظرية.

26. 12 . المكاملة.

أ . ليكن $x(t)$ تابعا معطى على مجال مغلق $[a, b]$ قيمه في فضاء باناخي (أي نظيمي تام) X (حقيقي او عقدي). بعد تعيين تجزئة:

$$\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \xi_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant t_n = b\}$$

للمجال $[a, b]$ عند النقاط المعلمة $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ ، وسيطها $d(\Pi) = \max \Delta t_j$ ، يمكننا تشكيل المجموع التكاملي لريمان:

$$s_\Pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k) \Delta t_k$$

بطبيعة الحال فإن هذا المجموع عنصر من الفضاء X . نؤكد انه إذا

كان التابع $x(t)$ مستمرا بتقطع فإن المجاميع (1) تؤول، من اجل تقسيم لا محدود للتجزئة Π ، أي من اجل $d(\Pi) \to 0$ ، نحو نهاية في X نسميها تكامل التابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$ ونرمز لها بـ:

$$\int_a^b x(t)\, dt$$

ب. إن البرهان على وجود تكامل تابع مستمر بتقطع قيمة في X يعيد البرهان الوارد بخصوص تابع عددي (41.9 ـ 61.9). نشير هنا الى أهم مراحله. يسمى التابع:

$$\omega_x(\delta) = \sup_{\substack{|t'-t''|\leqslant\delta \\ t', t'' \in [a, b]}} \| x(t') - x(t'') \|$$

تذبذب التابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$ ؛ إن كان $x(t)$ مستمرا فإن $\omega_x(\delta)$ يؤول الى الصفر عندما $\delta \to 0$. كما هو الحال في 41.9 جـ ـ د فإن المتراجحتين التاليتين قائمتان من اجل المجاميع التكاملية لأي تابع $x(t)$: إذا حصلنا على تجزئة Π انطلاقا من تجزئة اخرى باضافة بعض نقاط تقسيم لهذه الاخيرة فإن:

$$\| s_\Pi(x) - s_{\Pi'}(x) \| \leqslant \omega_x(\delta)(b-a) \qquad (2)$$

من اجل $\delta \geqslant d(\Pi)$ ؛ إذا كانت Π وَ Π' تجزئتين كيفيتين مع $d(\Pi) \leqslant \delta$ ، وَ $d(\Pi') \leqslant \delta$ ، فإن:

$$\| s_\Pi(x) - s_{\Pi'}(x) \| \leqslant 2\omega_x(\delta)(b-a) \qquad (3)$$

بعد اثبات المتراجحتين (2) وَ (3) يبقى تطبيق (من اجل $x(t)$ مستمر) الخاصية $\lim_{\delta\to 0} \omega_x(\delta) = 0$ وكوْن الفضاء X تاما. اما الانتقال الى تابع مستمر بتقطع فيتم كما ورد في 61.9.

جـ. يمكن، كما هو الحال في 51.9 ـ جـ، البرهان على ان كل تابع $x(t)$ قابل للمكاملة على $[a, b]$ تابع محدود (بالنظيم) بحيث ان:

$$\| x(t) \| \leqslant c$$

من السهل اثبات الخاصيات الرئيسية التالية الخاصة بالتكامل:

1) $\int_a^b \alpha x(t)\,dt = \alpha \int_a^b x(t)\,dt$ (حيث α عدد)

2) $$\int_a^b [x(t)+y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt$$

3) $\int_a^b x(t)\,dt + \int_b^c x(t)\,dt = \int_a^c x(t)\,dt$ (حيث $(a<b<c)$)

4) $$\left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \|x(t)\|\,(b-a)$$

5) $$\left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|\,dt.$$

نحصل عليها كلها بالإنتقال الى النهاية في الخاصيات المماثلة المتعلقة بالمجاميع التكاملية.

د. القيمة المتوسطة لتابع. كما هو الحال بخصوص التوابع العددية (51.9 ـ ط) يسمى المقدار.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\,dt$$

من اجل تابع $x(t)$ مستمر بتقطع قيمة في فضاء باناخي X، **القيمة المتوسطة** (أو الوسطى) للتابع $x(t)$ على المجال $[a, b]$. إن القيمة المتوسطة لتابع $x(t)$ حقيقي محصورة بين قيمتيه الصغرى والعظمى على $[a, b]$ وهي تساوي قيمة $x(t_0)$ إن كان التابع $x(t)$ مستمراً.

بخصوص تابع ذي قيم في فضاء باناخي (يمكن ان يكون ذي قيم عقدية) فإن القيمة المتوسطة قد تكون مخالفة لكل قيمة يأخذها هذا التابع على المجال $[a, b]$. وهكذا:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ie^{it}\,dt = e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

على الرغم من أن التابع ie^{it} لا ينعدم في مجال المكاملة.

ر. لتكن E مجموعة في فضاء شعاعي L؛ **المغلف المحدب** للمجموعة E

هو، تعريفا، المجموعة $V(E)$ المؤلفة من كل الاشعة ذات الشكل:

$$y=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k \quad (x_k\in E,\ \alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1,\ m=1,2,\ldots) \tag{4}$$

إن المجموعة $V(E)$ محدبة (43.12 ـ ب): ذلك انه إذا كان

$$\alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0,\quad \alpha+\beta=1,\quad x_k\in E,\quad y_r\in E,$$

و:

$$x=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k\in V(E),\quad y=\sum_{r=1}^{n}\beta_r y_r\in V(E),$$

فإن الشعاع:

$$\alpha x+\beta y=\alpha\sum_{k=1}^{m}\alpha_k x_k+\beta\sum_{r=1}^{n}\beta_r y_r=\sum_{k=1}^{m}\alpha\cdot\alpha_k x_k+\sum_{r=1}^{n}\beta\cdot\beta_r y_r$$

ينتمي هو الآخر الى $V(E)$ لأن $\alpha\alpha_k\geqslant 0$ car ، $\beta\beta_r\geqslant 0$ وَ:

$$\sum_{1}^{m}\alpha\cdot\alpha_k+\sum_{1}^{n}\beta\cdot\beta_r=\alpha\sum_{1}^{m}\alpha_k+\beta\sum_{1}^{n}\beta_r=\alpha+\beta=1$$

من جهة اخرى، فإن كل مجموعة محدبة P تحوي، عند احتوائها مجموعة معطاة E ، كل الاشعة ذات الشكل (4). ينتج ذلك من اجل $m=2$ من التعريف نفسه لمجموعة محدبة. نواصل البرهان بالتدريج: نفرض ان هذا صحيح من اجل كل $m-1$ شعاعا ونثبت صحته من اجل m شعاعا كيفياً $x_1,\ldots,x_m$ في E . لدينا:

$$\begin{aligned}z&=\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m\\&=\frac{\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{m-1}x_{m-1}}{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}}(\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1})+\alpha_mx_m\\&=(\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1})z_1+\alpha_mx_m.\end{aligned}$$

ينتمي الشعاع z_1 الى المجموعة P حسب افتراض التدريج؛ اما النقطة z فهي منتمية لـِ P بصفتها نقطة من القطعة المستقيمة التي تصل z_1 وَ x_m .

يمكن القول إذن بأن المجموعة $V(E)$ التي انشأناها هي اصغر مجموعة محدبة تحوي E . إن كانت E نفسها محدبة فإن لدينا بطبيعة الحال $V(E)=E$.

س. هناك في فضاءات باناخ مجموعات محدبة غير مغلقة (يمثل مجال مفتوح من المستقيم العددي مجموعة من هذه المجموعات). بعد تعاطي مجموعة $E \subset X$، حيث X فضاء باناخي، يمكن تشكيل مغلفة المحدب $V(E)$ ثم ملاصقه $\overline{V(E)}$ ؛ يسمى هذا الاخير المغلف المحدب المغلق للمجموعة E . إن المجموعة $\overline{V(E)}$ محدبة؛ نلاحظ عموما ان ملاصق مجموعة محدبة هو ايضا مجموعة محدبة لأننا نستنتج من:

$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n, \quad x_n \in V, \quad y_n \in V$$

ان:

$$\alpha x + \beta y = \lim (\alpha x_n + \beta y_n) \in \overline{V}$$

إن المجموعة $\overline{V(E)}$ هي اصغر مجموعة محدبة ومغلقة تحوي المجموعة المعطاة E .

ص. نظرية. إن المتوسط (د) لتابع $x(t)$ مستمر بتقطع قيمه في فضاء باناخ X ينتمي الى المغلف المحدب المغلق لمجموعة قيم $x(t)$ على المجال $[a, b]$.

البرهان ينتج من تعريف المتوسط:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{k=1}^{n} x(\xi_k)\,\Delta t_k$$

لأن المجموع التكاملي في الطرف الايمن ينتمي الى المغلف المحدب المؤلف من قيم التابع (لأن $\frac{1}{b-a}\sum_{k=1} \Delta t_k = 1$).

بخصوص المثال المعطى في د فإن متوسط التابع ie^{it} على $[0, 2\pi]$. المساوي لـِ 0 ينتمي الى المغلف المحدب المؤلف من كل قيم التابع ie^{it} على $[0, 2\pi]$: تملأ هذه القيم الدائرة ذات نصف القطر 1 ، اما مغلفها المحدب فهو كل القرص المحدود بهذه الدائرة.

ط. التكاملات الموسعة. يمكن إنشاء نظرية التكاملات الموسعة المؤلفة من التوابع ذات القيم المنتمية لفضاء باناخي على غرار حالة التوابع العددية (الفصل 11). نشير هنا لأهم مراحلها. ليكن $x(t)$ تابعا قيمه في

فضاء باناخي X ، معرفاً على نصف المستقيم $a \leqslant t < \infty$ وقابلا للمكاملة (مستمراً بتقطع مثلا) على كل مجال $a \leqslant t \leqslant b$. التكامل الموسع من النمط الاول

$$\int_{a}^{\infty} x(t)\,dt \tag{5}$$

معرف كنهاية (باعتبار نظيم الفضاء X) التكامل:

$$\int_{a}^{b} x(t)\,dt \tag{6}$$

من اجل $b \to \infty$ شريطة ان تكون هذه النهاية موجودة. بصفة خاصة إذا كان التكامل المعتاد:

$$\int_{a}^{\infty} \| x(t) \|\,dt \tag{7}$$

موجودا فإن الامر كذلك بخصوص التكامل الموسع (5)، نقول عندئذ عن التكامل (5) إنه **متقارب مطلقا**؛ لدينا، زيادة على ذلك، التقدير:

$$\left\| \int_{a}^{\infty} x(t)\,dt \right\| \leqslant \int_{a}^{\infty} \| x(t) \|\,dt \tag{8}$$

إن وجود التكامل (5)، في حالة وجود التكامل (7)، ناتج من مقياس كوشي: لكي يكون التكامل (5) موجودا يلزم ويكفي، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ان يوجد عدد طبيعي N بحيث تكون المتراجحة:

$$\left\| \int_{p}^{q} x(t)\,dt \right\| < \varepsilon$$

محققة مهما كان $N \leqslant p$ و $N \leqslant q$.

تعمم التكاملات الموسعة من النمط الثاني والنمط الثالث بطريقة مماثلة.

36. 12 . التكامل والتابع الاصلي.

أ . ليكن $x(t)$ تابعا مستمرا بتقطع على مجال $[a, b]$ قيمه في فضاء باناخي X؛ لنثبت أن للتابع

$$F(t) = \int_{a}^{t} x(\xi)\,d\xi$$

مشتقا عند كل نقطة استمرار $t = t_0$ للتابع $x(t)$ ، يساوي القيمة $x(t_0)$.

لدينا حسب قواعد المكاملة 26. 12 ـ جـ :

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}=\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} x(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} x(t_0)\,d\xi+\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[x(\xi)-x(t_0)]\,d\xi=$$

$$=x(t_0)+\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[x(\xi)-x(t_0)]\,d\xi.$$

ثم لدينا بفضل استمرار التابع $x(t)$ عند النقطة t_0 :

$$\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[x(\xi)-x(t_0)]\,d\xi\right|\leqslant \max_{\xi\in[t_0,\,t]}\|x(\xi)-x(t_0)\|\to 0$$

وهذا من اجل $t\to t_0$ ، ومنه تأتي النتيجة.

ب. نقول عن تابع $G(t)$ قيمة في فضاء باناخ X إنه تابع اصلي للتابع $x(t)$ المستمر بتقطع إذا كان: $G'(t)\equiv x(t)$ عند كل نقطة استمرار $x(t)$. إذا كان هناك تابعان اصليان $G(t)$ وَ $F(t)$ للتابع $x(t)$ فإن

$$[G(t)-F(t)]'=G'(t)-F'(t)=x(t)-x(t)\equiv 0$$

وبالتالي، بمراعاة النظرية 16. 12 ـ ق، فإن التابع $G(t)-F(t)$ ثابت. نرى إذن أن الفرق بين تابعين اصليين عنصر ثابت من الفضاء X . بما ان التابع (1)، كما رأينا، تابع اصلي فإن كل تابع اصلي آخر يكتب على الشكل:

$$G(t)=\int_{a}^{t} x(\xi)\,d\xi+x_0$$

حيث x_0 عنصر ثابت من الفضاء X . بصفة خاصة، لدينا الدستور التالي من اجل كل تابع اصلي:

$$G(b)-G(a)=\int_{a}^{b} x(\xi)\,d\xi$$

وهو دستور يعمم دستور نيوتن ـ ليبنيتز.

جـ. بالعكس، ليكن $G(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق للمتغير $t\in[a,\,b]$

مشتقه مستمر بتقطع، لدينا عندئذ المساواة التالية من اجل كل t :

$$G(t) = G(a) + \int_a^t G'(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

ذلك اننا إذا رمزنا مؤقتا بـ $G^*(t)$ للطرف الايمن من (2) فإن هذا التابع، حسب أ، يقبل الاشتقاق ومشتقه هو $G'(t)$ عند كل نقطة استمرار لهذا الاخير. يتمتع التابع $G(t)$ بنفس الخاصية، إذن لدينا ثابتا $G^*(t) - G(t) = c_0 =$ حسب ب لأن التابعين $G(t)$ و $G^*(t)$ مستمران. لكن $G^*(a) = G(a)$ ومنه $c_0 = 0$ وبذلك اثبتنا الدستور (2).

د. لدينا من اجل التوابع العددية القابلة للإشتقاق دستور لاغرانج (44.7):

$$G(b) - G(a) = (b - a)\, Q$$

حيث Q عدد محصور بين اكبر قيمة للتابع $G'(t)$ على $[a, b]$ واصغرها، أي ان Q قيمة للتابع $G'(t)$ عند نقطة $t = t_0$. إن هذا الدستور يبقى قائما من اجل تابع $G(t)$ قابل للإشتقاق قيمه في فضاء باناخي X، الآ ان النقطة Q تنتمي في هذه الحالة الى المغلف المحدب المغلق لمجموعة القيم $G'(t)$ على $[a, b]$. ينتج ذلك مباشرة من 26.12 - ومن الدستور (2).

ر. ينتج من دستور نيوتن - ليبنيتز، كما هو الحال في 15.9 - أ، دستور المكاملة بالتجزئة.

$$\int_a^b u(t)\, dv(t) = u(t)\, v(t)\Big|_a^b - \int_a^b v(t)\, du(t)$$

مع حظة ان تابعا من التابعين $u(t)$ و $v(t)$ عددي والآخر شعاعي (قيمة في الفضاء X)، وان كلا منهما مرن بتقطع.

س. نحصل، كما هو الحال في 45.9، على دستور المكاملة بتبديل المتغير:

$$\int_{\tau=\alpha}^{\beta} x(t(\tau))\, t'(\tau)\, d\tau = \int_{t=a}^{b} x(t)\, dt$$

ضمن نفس الافتراضات على التابعين $x(t)$ وَ $t(\tau)$ والاعداد α ، β ، a ، b .

12 .46 . المشتقات ذات الرتب العالية، التفاضليات ذات الرتب العالية، دستور تايلور .

أ . إن المشتقات العالية لتابع $x(t)$ قيمه في الفضاء X معرفة، كما هو الشأن في حالة تابع عددي، بالتدريج. المشتق من الرتبة n ، تعريفا، هو المشتق الاول من المشتق ذي الرتبة $n-1$ إن كان هذا الاخير تابع قابل للمشتق من اجل $a \leqslant t \leqslant b$. ان كل المشتقات المحصل عليها توابع شعاعية قيمها في نفس الفضاء X .

إن المشتقات ذات الرتب العالية لتابع شعاعي لها نفس الرموز المصطلح عليها في حالة تابع عددي:

$$(x'(t))' \equiv x''(t), \ (x''(t))' \equiv x'''(t), \ \ldots, \ (x^{(n)}(t))' \equiv x^{(n+1)}(t)$$

ب. تعرف التفاضليات ذات الرتب العالية ايضا بالتدريج.

$$d^2x(t) \equiv d[dx(t)] \equiv d[x'(t)\,dt] = x''(t)\,dt^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^{n+1}x(t) \equiv d[d^nx(t)] \equiv d[x^{(n)}(t)\,dt^n] = x^{(n+1)}(t)\,dt^{n+1}$$

خلافا للتفاضلية الاولى فإن التفاضليات ذات الرتب العالية يتغير شكلها عند الانتقال الى متغير جديد مستقل (باستثناء التبديل الخطي للمتغير).

ج. إذا وجدت كل مشتقات التابع $x(t)$ ، بما فيها المشتق من الرتبة $(n+1)$ ، من اجل $a \leqslant t \leqslant b$ فإننا نحصل على دستور تايلور:

$$\Delta x(a) \equiv x(b) - x(a) =$$

$$= \begin{Bmatrix} dx(a) + \frac{1}{2} d^2x(a) + \ldots + \frac{1}{n!} d^nx(a), \\ x'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} x''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} x^{(n)}(a) \end{Bmatrix} + Q_n,$$

بالباقي الذي يمكن كتابته على الشكل:

$$Q_n = \frac{1}{n!} \int_a^b x^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$$

يتم البرهان على دستور تايلور بنفس الطريقة الواردة في 9 .25 ـ أ وهذا باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة 12 .36 ـ ر. بالإنطلاق من عبارة الباقي نبرهن على التقدير:

$$\| Q_n \| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \| x^{(n+1)}(t) \| \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n \, dt =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \| x^{(n+1)}(t) \| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

12 .56 . متتاليات وسلاسل التوابع ذات القيم المنتمية الى X .

أ. لتكن $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots$ متتالية توابع للمتغير $t \in [a, b]$ ، قيمها في فضاء باناخي X . يكون تابع $x(t)$ ، تعريفاً، نهاية للمتتالية $x_n(t)$ عندما $n \to \infty$ إذا تحققت العلاقة:

$$\lim_{n \to \infty} \| x(t) - x_n(t) \| = 0$$

وذلك من اجل كل $t \in [a, b]$. نقول عن المتتالية $x_n(t)$ إنها **متقاربة بانتظام** نحو النهاية $x(t)$ إذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_t \| x(t) - x_n(t) \| = 0$$

أي اذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد عدد طبيعي N بحيث $n \geqslant N$ يستلزم $\| x(t) - x_n(t) \| \leqslant \varepsilon$ من اجل كل $t \in [a, b]$.

رأينا 5 .69 ان نهاية متتالية متقاربة بانتظام من التوابع المستمرة هي ايضا تابع مستمر. هذا ولدينا النظريتان المماثلتان للنظريتين 9 .27 وَ 9 .77 المبرهن عليهما في حالة التوابع ذات القيم العددية، وهما:

ب. نظرية. إذا تقاربت متتالية $x_n(t)$ من التوابع القابلة للمكاملة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع $x(t)$ ، فإن $x(t)$ قابل أيضا للمكاملة ولدينا:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^\tau x_n(t) \, dt = \int_a^\tau x(t) \, dt$$

بانتظام بالنسبة لـ $t \in [a, b]$. بصفة خاصة:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b x_n(t) \, dt = \int_a^b x(t) \, dt$$

ج . نظرية . إذا تقاربت متتالية $x_n(t)$ من التوابع المرنة بتقطع عند نقطة، على الاقل، $t_0 \in [a, b]$ * وكانت المتتالية $x'_n(t)$ المؤلفة من مشتقات $x_n(t)$ متقاربة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع $g(t)$ مستمر بتقطع، فإن المتتالية $x_n(t)$ متقاربة بانتظام على $[a, b]$ نحو تابع $x(t)$ مرن بتقطع وَ: $x'(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n(t) = g(t)$ عند نقاط استمرار $g(t)$.

برهان هذين النظريتين اعادة لبرهاني 27.9 وَ 77.9 .

د . نقول عن سلسلة:

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) + \ldots \qquad (1)$$

توابع ذات قيم في الفضاء X إنها **متقاربة** على مجال $[a, b]$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية

$$s_1(t) = x_1(t), \ldots, s_n(t) = x_1(t) + \ldots + x_n(t), \ldots$$

متقاربة من اجل كل $t \in [a, b]$ ؛ تسمى نهاية المتتالية $s_n(t)$ **مجموع** السلسلة (1) . نقول عن السلسلة (1) إنها **متقاربة بانتظام على** $[a, b]$ إذا كانت المتتالية $s_n(t)$ متقاربة بانتظام . من نتائج النظريتين ب و ج بعض الشروط الكافية لقابلية المكاملة حداً حداً وقابلية الاشتقاق لسلسلة توابع؛ نترك للقاريء مهمة صياغة هذه الشروط.

66. 12 . التوابع التحليلية . ليكن $x(\zeta)$ تابعا قيمه في فضاء عقدي نظيمي X ، معرفا في ساحة G من المستوى العقدي $\zeta = \xi + i\eta$. نقول عن هذا التابع إنه قابل للإشتقاق عند نقطة $\zeta_0 \in G$ إذا وجد في الفضاء X عنصر

$$x'(\zeta_0) = \lim_{h\to 0} \frac{x(\zeta_0 + h) - x(\zeta_0)}{h}$$

يسمى مشتق التابع $x(\zeta)$ بالنسبة للمتغير العقدي ζ عند النقطة ζ_0 .

نقول عن التابع $x(\zeta)$ إنه تحليلي في الساحة G إذا كان قابلا للإشتقاق بالنسبة لـِ ζ عند كل نقطة $\zeta_0 \in G$

فيما يخص التوابع التحليلية ذات القيم المنتمية لفضاء X ، فإن قضايا النظرية المعتادة للتوابع التحليلية (الفصل 10) تبقى قائمة. اما تعريف التكامل على طول خط من المستوى العقدي، وهذا التكامل ضروري لوضع اسس النظرية، فيصاغ بالطريقة المعتادة كما يلي. ليكن L سبيلا مرنا بتقطع في الساحة G : $\zeta = \zeta(t)$ ، حيث t يرسم مجالا $a \leqslant t \leqslant b$ ولتكن: $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ تجزئة للمجال $[a, b]$، $\zeta_j = \zeta(t_j)$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) هي النقاط المتوافقة لذلك من السبيل L و $\Delta\zeta_j = \zeta_{j+1} - \zeta_j$ ، نضع:

$$\int_L x(\zeta)\, d\zeta = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} x(\zeta_j)\, \Delta\zeta_j$$

يبرهن على وجود هذا التكامل من اجل تابع مستمر بتقطع قيمة منتمية لفضاء نظيمي تام X كما ورد في حالة تابع عددي (12.10). من جهة أخرى. لدينا نظرية كوشي الخاصة بتابع تحليلي $x(\zeta)$: إذا كان تابع $x(\zeta)$ تحليلياً في ساحة مترابطة ببساطة G ، فإن لدينا من اجل كل حافة مغلقة L محتواة في الساحة G : $\oint_L x(\zeta)\, d\zeta = 0$.

نثبت انطلاقا من نظرية كوشي دستور كوشي بالطريقة المعتادة:

$$x(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{x(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\zeta_0 \text{ داخل } L)$$

ثم القضايا الاخرى من § 10.3 بصفة خاصة، يقبل تابع تحليلي $x(\zeta)$، في الساحة G ، مشتقات من كل الرتب وينشر في كل قرص $Q = \{|\zeta - \zeta_0| < \rho\}$ محتو في الساحة G وفق سلسلة تايلور:

$$x(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\zeta - \zeta_0)^m \qquad (1)$$

حيث $a_m = \frac{1}{m!} x^{(m)}(\zeta_0)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

إن نصف قطر تقارب هذه السلسلة يساوي المسافة التي تفصل النقطة ζ_0 عن اقرب نقطة شاذة للتابع $x(\zeta)$ (أي النقطة التي يكف فيها التابع

$x(\zeta)$ عن التمتع بخاصية الاشتقاق) ويمكن ايجاده بفضل دستور كوشي - هادامار (93.12 - ع):

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\|a_m\|}$$

نحصل على المشتقات المتوالية للتابع $x(\zeta)$ باشتقاق السلسلة (1) حداً حداً:

$$x'(\zeta)=\sum_{m=1}^{\infty} ma_m(\zeta-\zeta_0)^{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(k)}(\zeta)=\sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-k+1)\,a_m(\zeta-\zeta_0)^{m-k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 12. 7 . المؤثرات المستمرة.

12. 17 . كنا اعطينا تعريف مؤثر في 12. 51، وقلنا أن تطبيقا A من فضاء شعاعي X في فضاء شعاعي Y (على نفس الحقل K) مؤثر خطي إذا تحققت الشروط:

$$A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2$$

من اجل كل x_1 وَ x_2 في الفضاء X مهما كان العددين α_1 وَ α_2 من الحقل K. إذا كان الفضاء Y وحيد البعد وَ$Y=K$،يسمى المؤثر A **تابعية خطية**.

نعتبر هنا المؤثرات الخطية من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y، نفرض الآن ان X وَ Y حقيقيان.

أ. طبقا للتعريف العام لتابع مستمر 11.5 - أ، نقول عن مؤثر خطي A من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y إنه مستمر عند$x=x_0\in X$، إذا استطعنا من اجل كل$\varepsilon>0$، ايجاد عدد $\delta>0$ بحيث تستلزم $|x-x_0|\leqslant\delta$ المتراجحة $|Ax-Ax_0|\leqslant\varepsilon$ هناك كالمعتاد تعريف يكافىء التعريف السابق: يكون المؤثر A مستمرا عند $x=x_0$ إذا كان

$Ax_n \to Ax_0$ (التقارب في Y) عندما $x_n \to x_0$ (التقارب في X).

ب. نقول عن مؤثر خطي A من فضاء X في فضاء Y إنه محدود إذا كان محدودا على كرة الوحدة في الفضاء X أي إذا كان $|x| \leqslant 1$ يستلزم $|Ax| \leqslant c$ حيث c ثابت مثبّت.. خينئذ تسمى الكمية:

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax|$$

نظيم المؤثر A. لدينا من اجل كل شعاع $x \in X$: $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$ ومنه $\left|A \frac{x}{|x|}\right| \leqslant \|A\|$ وبالتالي:

$$|Ax| \leqslant \|A\| \, |x| \qquad (1)$$

ج. إذا كان مؤثر خطي A محدوداً فهو مستمر عند كل نقطة x_0 من الفضاء X.

البرهان. ليكن A مؤثرا محدودا نظيمه $\|A\|$. لدينا:

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leqslant \|A\| \, |x - x_0| < \varepsilon$$

وهذا من اجل $\varepsilon > 0$ معطي و $|x - x_0| < \varepsilon / \|A\|$

د. إذا كان مؤثر خطي A مستمرا، على الاقل، عند نقطة $x = x_0$ فإن A محدود.

البرهان. نبحث عن δ بحيث نجد $|Ax - Ax_0| \leqslant 1$ عندما $|x - x_0| \leqslant \delta$

ليكن $|z| \leqslant 1$ و $x = x_0 + \delta z$. لدينا:

$$|x - x_0| = \delta \, |z| \leqslant \delta,$$

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| = \delta \, |Az| \leqslant 1$$

$$|Az| \leqslant \frac{1}{\delta},$$

وهو المطلوب.

ر. نتيجة لذلك لدينا: كل مؤثر خطي مستمر على الاقل عند نقطة من الفضاء X مؤثر مستمر عند كل نقطة.

إن النظريات الثلاث التالية قائمة أيضا من اجل مؤثر مستمر A من فضاء باناخي X في فضاء باناخي Y :

س. إذا تقاربت سلسلة $\sum_{1}^{\infty} x_n = s$ في الفضاء X فإن: $\sum_{1}^{\infty} Ax_n = As$

ص. إذا كان $x(t)$ تابعا مستمرا بتقطع على مجال $a \leqslant t \leqslant b$، قيمه في الفضاء X ، فإن لدينا:

$$A \left\{ \int_a^b x(t)\,dt \right\} = \int_a^b [Ax(t)]\,dt$$

ط. إذا كان $x(t)$ تابعا قابلا للإشتقاق عند $t = t_0$ ، قيمه في الفضاء X، فإن لدينا:

$$A[x'(t_0)] = (Ax)'(t_0).$$

يتبع برهان النظريات الثلاث اعلاه نفس الطريقة. يتعلق الامر بمجموع سلسلة وبمكاملته واشتقاقه، وهي نتائج تأتي بفضل بعض العمليات الخطية والانتقال الى النهاية، مع العلم ان المؤثرات الخطية المستمرة تتبادل مع العمليات الخطية كذا مع الانتقال الى النهاية ولذا فإن المؤثر A يحقق العلاقات الواردة في النظريات.

ع. إذا كانت ثلاثة مؤثرات A, A_1, A_2 من فضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y محدودة، فالامر كذلك بخصوص المؤثرين $A_1 + A_2$ وَ αA (51. 12 ـ ر) وهذا من اجل كل α حقيقي لأن لدينا من اجل $|x| \leqslant 1$:

$$|(A_1 + A_2)x| = |A_1x + A_2x| \leqslant |A_1x| + |A_2x| \leqslant$$
$$\leqslant \|A_1\| + \|A_2\|,$$
$$|\alpha Ax| = |\alpha|\,|Ax| \leqslant |\alpha|\,\|A\|.$$

زيادة على ذلك تبين العلاقات السابقة أن:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |(A_1 + A_2)x| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|,$$
$$\|\alpha A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |\alpha Ax| = |\alpha| \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax| = |\alpha|\,\|A\|$$

يمكن القول إذن ان الفضاء $L(X, Y)$ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y فضاء نظيمي عند تزويده بالنظيم 17.12 ـ ب:

$$\|A\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Ax|.$$

ف. ليكن B مؤثرا محدودا من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y وَ A مؤثرا خطيا محدودا من Y في فضاء نظيمي Z . حينئذ يكون المؤثر $P = AB$ معرفا من X في Z (12 .51 ـ ص). لنثبت ان المؤثر P محدود هو الآخر. لدينا من اجل كل $x \in X$:

$$|ABx| \leqslant \|A\| \, |Bx| \leqslant \|A\| \, \|B\| \, |x|$$

ومنه نرى أن $P = AB$ محدود وأن:

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \tag{2}$$

ق. بصفة خاصة، إذا كان A مؤثرا في X فإن:

$$\|A^2\| = \|AA\| \leqslant \|A\|^2$$

كما أن:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A^3\| = \|A^2A\| \leqslant \|A^2\| \, \|A\| \leqslant \|A\|^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \|A^n\| \leqslant \|A^{n-1}A\| \leqslant \|A^{n-1}\| \, \|A\| = \|A\|^n. \end{array} \right. \tag{3}$$

ك. نبحث في اطار الامثلة على نظيم مؤثر خطي خاص معرف في الفضاء $R^s[a, b]$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة على المجال $a \leqslant t \leqslant b$ ليكن $D(t, \lambda)$ تابعا مستمرا حقيقيا لـِ $t \in [a, b]$ ، وذلك مهما كانت قيمة الوسيط λ المنتمي الى مجموعة Λ . نفرض ان الكمية:

$$D = \sup_{\lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)| \, dt$$

منتهية. من اجل $x(t) \in R^s[a, b]$ نضع:

$$y(\lambda) \equiv A[x] = \int_a^b D(t, \lambda) \, x(t) \, dt \tag{4}$$

يحول المؤثر A كل تابع $x(t)$ الى تابع $y(\lambda)$ معرف على المجموعة

A . إن التابع $y(\lambda)$ محدود لأن:

$$|A(x)| = |y(\lambda)| = \left| \int_a^b D(t, \lambda)\, x(t)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \cdot \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt \leqslant D \|x\|. \quad (5)$$

وهكذا فإن الدستور (4) يعرف مؤثرا من الفضاء $R^e [a, b]$ في الفضاء $R(\Lambda)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المحدودة $y(\lambda)$. نزود الفضاء الاخير بالنظيم الطبيعي: $\|y\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |y(\lambda)|$

إن المؤثر A خطي بطبيعة الحال، ينتج من المتراجحة (5) انه محدود وان نظيمه لا يتجاوز الكمية D . لنثبت ان $\|A\| = D$.

نعتبر التابع $x_n(t, \lambda) = u_n[D(t, \lambda)]$ ، حيث $u_n(\tau)$ تابع مستمر يساوي 1- من اجل $\tau \leqslant -1/n$ و 1 + من اجل $\tau \geqslant +1/n$ وخطي في المجال $[-1/n, 1/n]$ (الرسم 10. 12). إن التابع $x_n(t, \lambda)$ مستمر هو الآخر بالنسبة لـِ t ، اما الجداء $D(t,\lambda) x_n(t,\lambda)$ فهو تابع غير سالب يساوي $|D(t, \lambda)|$ من اجل $|D(t, \lambda)| \geqslant 1/n$ ولا يتجاوز $|D(t, \lambda)|$ في النقاط الاخرى من اجل $\lambda \in \Lambda$ مثبّت فإن التابع $x_n(t, \lambda)$ عنصر من الفضاء $R^e(a, b)$. زيادة على ذلك:

$$A[x_n(t, \lambda)] \geqslant \int_{|D(t, \lambda)| \geqslant 1/n} |D(t, \lambda)|\, dt \geqslant \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt - \frac{1}{n}(b-a)$$

بما أن $\|x_n(t, \lambda)\| \leqslant 1$ لدينا:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax(t)\| \geqslant \sup_{n, \lambda} |A[x_n(t, \lambda)]| = \sup_{\lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt$$

بمراعاة المتراجحة (5) نحصل على:

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_a^b |D(t, \lambda)|\, dt$$

وهو المطلوب.

ل. ليكن $D(t)$ تابعا مستمرا لـِ $t \in [a, b]$ عندئذ يعرف الدستور:

$$F[x] = \int_a^b D(t)\, x(t)\, dt \qquad (6)$$

تابعية خطية في الفضاء $R^s(a, b)$ يمكن اعتبارها حالة خاصة من المؤثر في الوارد في ك، حيث ان مجموعة قيم الوسيط λ مؤلفة من نقطة واحدة.

بتطبيق النتيجة ك نحصل على: نظيم التابعية (6) يساوي:

$$\|F\| = \int_a^b |D(t)|\, dt$$

27. 12. نظرية حول التطبيق المفتوح.

أ. ليكن $y = f(x)$ تابعا معرفا على مجموعة X قيمه في مجموعة Y. تشكل النقاط $y = f(x)$ ، حيث x يتجول في مجموعة جزئية $Q \subset X$، صورة المجموعة الجزئية Q التي نرمز لها بـِ $f(Q)$. نسمي مجموعة كل النقاط $x \in X$ التي ينتمي من اجلها $y = f(x)$ الى مجموعة جزئية $F \subset Y$، الصورة العكسية للمجموعة الجزئية F ونرمز لها بـِ $f^{-1}(F)$.

إذا كان X و Y فضاءين متريين وَ $y = f(x)$ تابعا مستمرا فإن الصورة العكسية $f^{-1}(G)$ لكل مجموعة جزئية مفتوحة $G \subset Y$ مجموعة جزئية مفتوحة في X (41.5 ـ أ).

على الرغم من ذلك فإن الصورة $f(G)$ لمجموعة مفتوحة $G \subset X$ ليست بالضرورة مجموعة مفتوحة في Y. فمثلا إذا مثل X المستقيم $\infty > x > -\infty$ وَ Y المستقيم $\infty > y > -\infty$ وكان التابع $y = f(x)$ ثابتا فإن صورة كل مجموعة مفتوحة (كل مجموعة $G \subset X$ عموما) عبارة عن نقطة واحدة Y وهي إذن

لا تؤلف مجموعة مفتوحة في X . لو عززنا الفرض باضافة الشرط القائل ان التابع $f(x)$ يطبق الفضاء X على Y لاعتبرنا التابع المستمر المساوي لـ $(x-1)^3$ من اجل $x \geqslant 1$ و لـ $(x+1)^3$ من اجل $-1 \geqslant x$ ولـ 0 من اجل $|x| < 1$ ، إن هذا التابع الذي يطبق المحور X بأكمله على المحور Y يحول المجموعة المفتوحة $\{|x| < 1\}$ الى نقطة واحدة $y = 0$.

نفرض ان التابع المستمر $y = f(x)$ يطبق تقابلياً الفضاء X في الفضاء Y نختار $D_1(a, b) = X$ الفضاء المؤلف من التوابع $x(t)$ القابلة للإشتقاق باستمرار على المجال $[a, b]$ (52.12) الموزود بمسافته الطبيعية، ونختار Y المجموعة الجزئية من الفضاء $R^s(a, b)$ ، المؤلفة من كل التوابع القابلة للإشتقاق باستمرار على $[a, b]$ (نزود $R^s(a, b)$ بمسافته الطبيعية، مع العلم ان $R^s(a, b)$ مؤلف من كل التوابع المستمرة على $[a, b]$)، من حقنا اعتبار هذه المجموعة الجزئية فضاء مترياً. نعتبر التابع $y = f(x)$ الذي يصل كل تابع $x = x(t) \in D_1(a, b)$ بالتابع نفسه $y = y(t) \equiv x(t) \in R^s(a, b)$. إن هذا التابع متقارب لأن التقارب $x_n(t) \to x(t)$ في $D_1(a, b)$ يستلزم بطبيعة الحال التقارب: $y_n(t) = x_n(t) \to y(t) \equiv x(t)$ في $R^s(a, b)$. من البديهي ان التطبيق $y = f(x)$ تقابلي. ورغم ذلك فان صورة مجموعة مفتوحة في X ، مثلا صورة كرة الوحدة المفتوحة في $D_1(a, b)$ ليست مفتوحة في Y لأن كل جوار لنقطة $y_0(t) \in f(V)$ معرف بالمتراجحة $|y(t) - y_0(t)| < \varepsilon$ يحوي توابع مشتقاتها كبيرة لا نهائياً.

ب. نفهم الآن السبب الذي يجعل فروض النظرية التالية اساسية:

نظرية حول التطبيق المفتوح (باناخ). ليكن A مؤثرا خطيا مستمرا يطبق تقابلياً فضاء نظيميا تاما X على فضاء نظيمي تام Y . عندئذ يحو ل المؤثر A كل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ الى مجموعة مفتوحة $f(G) \subset Y$.

البرهان. نرمز بـ V_r للكرة $\{x : |x| < r\}$. نبرهن في البداية ان

ملاصق المجموعة $A(V_1)$ في Y يحوي كرة من الفضاء Y . لدينا فرضا :

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(V_n)$$

ومنه $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(V_n)}$. اعتمادا على نظرية بير (57.3 ـ أ)، يوجد عدد $n = N$ بحيث تحوي المجموعة $\overline{A(V_N)}$ كرة $\{y : |y - y_0| < \varepsilon\}$. بما ان المجموعة $\overline{A(V_N)}$ متوازية فهي تحوي أيضا الكرة $\{y : |y + y_0| < \varepsilon\}$. زيادة على ذلك فإن المجموعة $\overline{A(V_N)}$ محدبة (لأن كل مؤثر خطي يحول مجوعة محدبة الى مجموعة محدبة، ولأن ملاصق مجموعة محدبة مجموعة محدبة حسب 26.12 ـ س) وتحوي إذن الكرة $W_\varepsilon = \{y: |y| < \varepsilon\}$ المحتواة في المغلف المحدب للكرتين المذكورتين.

من الواضح، بسبب التشابه ان لدينا الاحتواء التالي من اجل كل $\rho > 0$: $W_\rho \subset \overline{A(V_{N\rho/\varepsilon})}$. بصفة خاصة، لدينا: $W_{\varepsilon/N} \subset \overline{A(V_1)}$ ، وهو المطلوب.

نثبت الآن أن المجموعة $A(V_1)$ نفسها (وليس فقط ملاصقتها) تحوي الكرة $W_{\varepsilon/(2N)}$. ليكن $y \in W_{\varepsilon/(2N)}$. بما اننا اثبتنا بأن $W_{\varepsilon/(2N)} \subset \overline{A(V_{1/2})}$ يمكننا اختيار نقطة $y_1 \in A(V_{1/2})$ قريبة بالقدر الذي نريد من النقطة y . مثلا ، يمكن القيام بذلك بحيث $|y - y_1| < \varepsilon/(4N)$. نظرا لكون $W_{\varepsilon/(4N)} \subset \overline{A(V_{1/4})}$ نستطيع ايضا ايجاد نقطة $y_2 \in A(V_{1/4})$ بحيث $|y - y_1 - y_2| < \varepsilon/(8N)$. نواصل بهذه الطريقة فننشيء من اجل كل $n = 1, 2, \ldots,$ نقطة $y_n \in A(V_{1/2^n})$ بحيث $|y - y_1 - y_2 - \ldots - y_n| < \varepsilon/(2^{n+1}N)$.

لدينا حسب الانشاء $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. لكن: $y_n = Ax_n$ ، حيث $x_n \in V_{1/2^n}$, ومنه $|x_n| < 1/2^n$. لما كان الفضاء X تاما فإن السلسلة $x_1 + x_2 + \ldots$ متقاربة (73.12 ـ ب)، ليكن $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. ثم ان المؤثر A مستمر وعليه $Ax = A\left(\sum_1^{\infty} x_n\right) = \sum_1^{\infty} Ax_n = \sum_1^{\infty} y_n = y$. زيادة على ذلك $|x| \leqslant \sum_1^{\infty} |x_n| < \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. وبالتالي فإن الكرة $W_{\varepsilon/(2N)}$

محتواه في صورة الكرة V_1 ، وهو ما اكدناه.

لدينا ، دائما بسبب التشابه ، $W_\rho \subset A(V_{\varepsilon\rho/(2N)})$ من اجل كل $\rho > 0$.

بصفة خاصة، ينتج من $|x - x_0| < \delta$ أن

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| < \delta\varepsilon/(2N)$$

بحيث ان الصورة $A(U)$ للكرة $U = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ تحوي الكرة $\{y : |y - Ax_0| < \delta\varepsilon/(2N)\}$ ومنه يأتي ان صورة كل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ مجموعة مفتوحة في Y ، بذلك ينتهي برهان النظرية.

ج . نتيجة. إذا كان A تطبيقا مستمرا وتشاكلا (12 .41 ـ ف) من فضاء نظيمي تام X على فضاء نظيمي تام Y فإن التطبيق العكسي A^{-1} مستمر أيضاً.

البرهان. إن المؤثر العكسي A^{-1} معرف في هذه الحالة بطريقة وحيدة وهو بطبيعة الحال خطي مثل A . بفضل النظرية ب، فإن الصور العكسية بالمؤثر A^{-1} لكل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ هي المجموعة المفتوحة $AG \subset Y$. بصفة خاصة، نرى ان الصورة العكسية الكرة $\{x : |x| < \varepsilon\}$ تحوي كرة $\{y : |y| < \delta\}$ ، وهذا يعني استمرار التطبيق A^{-1} .

د . نتيجة. إذا كان فضاء شعاعي L تاما بالنسبة لكلا النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ فإن وجود ثابت c_1 بحيث $|x|_2 \geqslant c_1 |x|_1$ من اجل كل $x \in L$ يستلزم وجود ثابت c_2 بحيث $|x|_1 \geqslant c_2 |x|_2$ من اجل كل $x \in L$، وبذلك يكون النظيمان $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئين (12 .53).

البرهان. نعتبر التطبيق المطابق A من الفضاء النظيمي X الذي نحصل عليه بتزويد L بالنظيم $|x|_2$ على الفضاء النظيمي Y الذي نحصل عليه بتزويد L بالنظيم $|x|_1$. إن هذا التطبيق مستمر لأن $|x|_2 \geqslant c_1 |x|_1$. كما ان الامر كذلك فيما يخص التطبيق العكسي حسب الفرض وَ ج؛ ومنه تأتي النتيجة المطلوبة (12 .17 ـ د)

ر . نفرض ان فضاء تاما X كتب على شكل مجموع مباشر لفضاءين جزئيين

مغلقين X_1 وَ X_2 بحيث يكون لدينا التمثيل الوحيد التالي من اجل كل شعاع $x \in X$:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2$$

يسمى المؤثر P_1 الذي يصل كل شعاع x بمركبته X_1 المسقِط (أو الاسقاط) على الفضاء الجزئي x_1 ، كما يسمى المؤثر P_2 الذي يصل كل شعاع x بمركبته x_2 المسقِط (أو الاسقاط) على الفضاء الجزئي X_2 . إن هذين المؤثرين خطيان، لكنه ليس بديهياً انهما مستمران. سنرى بان المؤثرين P_1 وَ P_2 مستمران عند افتراض أن الفضاء X تام والفضاءين الجزئيين X_1 وَ X_2 مغلقان، وذلك باستعمال النظرية الخاصة بالتطبيق المفتوح.

بالاضافة الى النظيم الاول $|x|_1 \equiv |x|$ ندخل في الفضاء X النظيم

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1$$

من الواضح أن $|x|_2$ يؤكد مسلمات النظيم. لدينا أيضا $|x|_1 \leqslant |x_1|_1 + |x_2|_1 = |x|_2$.

لنثبت أن الفضاء X تام بالنسبة للنظيم $|x|_2$. لتكن $\{x^{(n)}\}$ متتالية كوشية بالنسبة للنظيم $|x|_2$ ، ينتج من المساواة

$$|x^{(n)} - x^{(m)}|_2 = |x_1^{(n)} - x_1^{(m)}|_1 + |x_2^{(n)} - x_2^{(m)}|_1$$

ان المتتاليتين $\{x_1^{(n)}\}$ وَ $\{x_2^{(n)}\}$ كوشيتان بالنسبة للنظيم $|x|_1$. بما أن الفضاء X تام فإن النهايتين $x_1 = \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}$ وَ $x_2 = \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}$ موجودتان، ثم إن الفضاءين الجزئيين X_1 وَ X_2 مغلقان ولذا $x_1 \in X_1$ وَ $x_2 \in X_2$. نضع $x = x_1 + x_2$. لدينا

$$|x - x^{(n)}|_2 = |x_1 - x_1^{(n)}|_1 + |x_2 - x_2^{(n)}|_1 \to 0$$

أي أن x هو نهاية المتتالية $\{x^{(n)}\}$ بالنسبة للنظيم $|x|_2$ ، وهذا ما يبين ان X تام بالنسبة للنظيم $|x|_2$. بتطبيق د نرى ان النظيمين

$|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئان، بصفة خاصة يوجد ثابت c بحيث تحقق المتراجحة:

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1 \leqslant c\,|x|_1 = c\,|x|$$

من اجل كل $x \in X$، لدينا إذن في هذه الحالة:

$$|P_1x| = |x_1|_1 \leqslant c\,|x|, \quad |P_2x| = |x_2|_1 \leqslant c\,|x|$$

وهو مايبين استمرار المؤثرين P_1 وَ P_2

س. ليكن X فضاء تاما مجموعا مباشرا لفضاءين جزئيين مغلقين X_1 وَ X_2، وليكن P_1 وَ P_2 المسقطين الموافقين لـِ X_1 وَ X_2 . نعتبر مؤثرا A_1 خطياً ومستمرا في X_1 وَمؤثرا A_2 خطيا ومستمرا في X_2 . نعرف في الفضاء X المؤثر A حسب الدستور:

$$Ax \equiv A(x_1 + x_2) = A_1x_1 + A_2x_2.$$

من الواضح ان المؤثر A خطي. إن المؤثر A مستمر في الفضاء X، ذلك أن:

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2 = A_1P_1x + A_2P_2x$$

لما كان المؤثران P_1 وَ P_2 محدودين في الفضاء X حسب د فإن:

$$|Ax| \leqslant \|A_1\| \cdot \|P_1\| \cdot |x| + \|A_2\| \cdot \|P_2\| \cdot |x| = c\,|x|$$

وهو المطلوب.

12 .37 . تقارب متتالية مؤثرات خطية.

أ. ندخل في 12 .17 ـ ب النظيم:

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax|$$

في الفضاء $L(X, Y)$ المؤلف من المؤثرات الخطية من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y .

تتقارب متتالية $A_1, A_2, \ldots$ من المؤثرات نحو المؤثر A بالنسبة

للنظيم السابق إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد عدد N بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |Ax - A_n x| \leqslant \varepsilon$$

مهما كان $n \geqslant N$.

ب. لنثبت ان الفضاء $L(X, Y)$ تام عندما يكون Y تاما. لتكن $A_1, A_2, \ldots$ متتالية كوشية من المؤثرات الخطية من X في Y بحيث اننا نستطيع، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ايجاد عدد N بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\| A_n - A_m \| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

مهما كان n، $m \geqslant N$. لدينا من اجل كل $x \in X$، حسب 17. 12 ـ (1):

$$| A_n x - A_m x | \leqslant \| A_n - A_m \| \, | x | \leqslant \varepsilon \, | x |$$

بحيث ان الاشعة $A_n x \in Y$ تشكل متتالية كوشية في الفضاء Y. ثم إن Y تام وبالتالي يوجد شعاع $y \in Y$ بحيث $y = \lim_{n\to\infty} A_n x$، نضع $y = Ax$ ونثبت ان A مؤثر خطي محدود يساوي نهاية (في الفضاء $L(X, Y)$) المتتالية A_n. تبين المساواة:

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n (\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay$$

أن A خطي. ثم إن لدينا من اجل $| x | \leqslant 1$:

$$|Ax - A_m x| = |(A - A_m) x| = \lim_{n\to\infty} |(A_n - A_m) x| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

بفضل (1) ومن اجل $m \geqslant N$، ينتج من ذلك أن $A - A_m$، وبالتالي A أيضا، مؤثر محدود. اخيرا تبين المتراجحة (2) ان لدينا المتراجحة التالية من اجل $m \geqslant N$:

$$\| A - A_m \| \leqslant \varepsilon$$

وهو ما يعطي $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ من اجل نظيم الفضاء $L(X, Y)$.

إذا كان Y هو المحور الحقيقي R_1 فإن الفضاء $L(X, Y) = L(X, R_1)$

تام. يسمى هذا الفضاء (المؤلف من كل التابعيات الخطية المستمرة على الفضاء X) الفضاء الثنوي (أو باختصار الثنوي) لـِ X ونرمز له بـِ X^*.

جـ. بصفة خاصة، فان الفضاء $L(X, X)$ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة في فضاء باناخي X فضاء تام. نرمز لـِ $L(X,X)$ في المستقبل بـِ $L(X)$.

د. يحدث ان تتمتع المؤثرات $A, A_1, A_2, \ldots$ بالخاصية $A_n x \to Ax$ من اجل كل $x \in X$ بدون ان يؤول $\| A_n - A \|$ الى الصفر. (سنعطي مثالا في 57.12 ـ ص). سنستفيد من التوطئة التالية:

توطئة. إذا كانت نظيمات المؤثرات $A_1, A_2, \ldots$ محدودة من الاعلى بنفس الثابت c وكانت العلاقة $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ محققة من اجل كل العناصر x من مجموعة Q كثيفة اينما كان في X فإن $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ مهما كان $x \in X$.

البرهان. ليكن $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ ، حيث $x_k \in Q$. نبحث، من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عن عدد k بحيث يكون $| x - x_k | < \varepsilon/(3c)$، ثم عدد N بحيث تتحقق المتراجحة $| Ax_k - A_n x_k | < \varepsilon/3$ من اجل $n \geqslant N$. نحصل عندئذ من اجل $n \geqslant N$ على:

$$
\begin{aligned}
| Ax - A_n x | &\leqslant | Ax - Ax_k | + | Ax_k - A_n x_k | + \\
&+ | A_n x_k - A_n x | \leqslant \| A \| \, | x - x_k | + \frac{\varepsilon}{3} + \\
&+ \| A_n \| \, | x_k - x | \leqslant c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

وهذا يعني ان $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.

نقول عن متتالية مؤثرات $A_1, A_2, \ldots$ إنها **متقاربة بقوة** نحو المؤثر A إذا كان $A_n x \to Ax$ من اجل كل $x \in X$ ، ويسمى المؤثر A **النهاية القوية** للمتتالية A_n .

47. 12 . مبدأ الحد المنتظم.

أ. **نظرية** (باناخ وَ ستينهاوس **Steinhaus**). إذا شكلت نظيمات متتالية مؤثرات خطية ومستمرة $A_1, A_2, \ldots$ من فضاء باناخي X في فضاء نظيمي Y ، متتالية غير محدودة:

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

فإنه توجد، في كل كرة $U_\rho(x_0) = \{x \in X : |x - x_0| < \rho\}$ نقطة x بحيث:

$$\sup_n |A_n(x)| = \infty$$

البرهان. إن متتالية التوابع $A_1(x), A_2(x), \ldots$ المحدودة كلها في الكرة: $|x| \leqslant 1$ ، ليست محدودة بانتظام في هذه الكرة. وبالتالي، نظرا للتشابه فهي ليست محدودة بانتظام على أية كرة $|x| \leqslant r$. ومنه فهذه المتتالية ليست محدودة بانتظام على أية كرة من الشكل $U_r(x_0) = \{x : |x - x_0| \leqslant r\}$ لأنه لو كانت الاشعة $A_n(x)$ وَ $A_n(x_0)$ محدودة من اجل $x \in U_r(x_0)$ لكان الامر يكون كذلك بخصوص الاشعة $A_n(x - x_0) = A_n(x) - A_n(x_0)$ ، وهذا مستحيل إذ أن $x - x_0$ يرسم الكرة ذات المركز o ونصف القطر r ،نختار إذن في الكرة $U_\rho(x_0)$ عنصرا x_1 ($|x_1 - x_0| < \rho$) بحيث تكون قيمة شعاع من الاشعة A_n (نرمز بهذا الشعاع مؤقتا بـ A_1) لا تتجاوز، بالنظيم، الوحدة أي بحيث:

$$|A_1(x_1)| > 1$$

نبحث داخل هذه الكرة عن عنصر x_2 ومؤثر $A_2(x)$ بحيث $|A_2(x)| > 2$ ثم عن كرة اخرى $U_{\rho_2}(x_2)$ محتواة في الكرة السابقة وتحقق كل نقطة منها:

$$|A_2(x)| > 2 \quad \left(\rho_2 < \frac{1}{2}\rho_1\right)$$

نواصل هذه العملية فنصل الى متتالية كرات متداخلة انصاف اقطارها

$\rho_1, \rho_2, \ldots$ تؤول الى الصفر. لدينا بخصوص النقطة x التي تشترك فيها هذه الكرات (هذه النقطة موجودة لأن الفضاء X تام ولأن لدينا التوطئة 47.3 ـ د) المتراجحات التالية:

$$|A_1(x)| > 1, \quad |A_2(x)| > 2, \ldots, |A_n(x)| > n, \ldots$$

وهو المطلوب.

ب. **نتيجة.** إذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ متتالية مؤثرات خطية مستمرة من فضاء باناخي X في فضاء نظيمي Y، وإذا كانت، من اجل كل شعاع x من الفضاء الباناخي X، متتالية الاشعة $A_1x, A_2x, \ldots$ محدودة فإن نظيمات المؤثرات $A_1, A_2, \ldots$ محدودة من الاعلى بنفس الثابت.

ج. **نتيجة.** إذا كانت متتالية مؤثرات $A_1, A_2, \ldots$ خطية ومستمرة من فضاء باناخي X في فضاء باناخي Y، وكانت للاشعة $y_n = A_nx$ نهاية $y \in Y$ من اجل كل $x \in X$ فإن التطبيق A الذي يصل كل x بـ $\lim A_nx$ تطبيق خطي مستمر من X في Y.

البرهان. ليكن x_1 و x_2 شعاعين كيفيين من الفضاء X، α_1 و α_2 ثابتان كيفيان. بالإنتقال الى النهاية من اجل $n \to \infty$ في المساواة:

$$A_n(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1A_nx_1 + \alpha_2A_nx_2$$

نحصل على

$$A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2,$$

أي أن التطبيق A خطي. بما ان متتالية الاشعة A_nx متقاربة فهي محدودة من اجل كل $x \in X$، ونرى إذن حسب ب، أن نظيمات المؤثرات A_n محدودة: $\|A_n\| \leqslant C$. لدينا إذن: $|A_nx| \leqslant \|A_n\| \leqslant C$ من اجل كل x، $|x| \leqslant 1$، وبالتالي $|Ax| = \lim_{n\to\infty} |A_nx| \leqslant C$؛ وهكذا فإن المؤثر A محدود في كرة الوحدة، وبالتالي مستمر، وهو المطلوب.

زيادة على ذلك فإن متتالية المؤثرات A_n متقاربة بقوة نحو المؤثر A (37.12 ـ د).

د. يعطي الاستدلال السابق التقدير التالي الخاص بنظيم المؤثر A :

$$\| A \| \leqslant \sup_n \| A_n \|$$

يمكن ان ندقق اكثر في هذا التقدير. ليكن $c = \underline{\lim} \| A_n \|$ ، نفرض اننا نستطيع من اجل $\varepsilon > 0$ معطي، استخراج متتالية جزئية A_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ تحقق $\| A_{n_k} \| \leqslant c + \varepsilon$. بما أن لدينا بطبيعة الحال $Ax = \lim_{k \to \infty} A_{n_k} x$ من اجل كل $x \in X$ فإن:

$$\| A \| \leqslant \sup \| A_{n_k} \| \leqslant c + \varepsilon$$

وهذا حسب ما سبق، لما كان ε كيفياً فإن:

$$\| A \| \leqslant \underline{\lim} \| A_n \|$$

في بعض الحالات الملموسة، يمكننا وضع الرمز > في هذه المتراجحة (سنرى مثلا ضمن 57. 12 ـ ص).

ر. توطئة. نفرض أن متتالية مؤثرات A_n متقاربة بقوة نحو مؤثر A ومتتالية اشعة x_n متقاربة (بالنظيم) نحو شعاع x . عندئذ $Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x_n$.

البرهان. بفضل مبدأ الحد المنتظم، فإن نظيمات المؤثرات A_n محدودة بثابت C . إذن:

$$| Ax - A_n x_n | \leqslant | Ax - A_n x | + | A_n x - A_n x_n | \leqslant$$
$$\leqslant | (A - A_n) x | + C \, | x - x_n |$$

إن حدي الطرف الثاني متقاربتان نحو الصفر عندما $n \to \infty$، وهو المطلوب.

س. يمكننا في أ ـ ر تعويض متتالية المؤثرات A_n بتابع $A(t)$ قيمة مؤثرية، معرف على مجموعة $T = \{t\}$ وتعويض التقارب $n \to \infty$ بالتقارب وفق اتجاه S معرف على المجموعة T (21. 4).

نعرض في الفقرات الموالية بعض التطبيقات الهامة لمبدأ الحد المنتظم.

12 .57 . فضاء المتتاليات المحدودة وفضاءاته الجزئية.

أ. نرمز بـِ X للفضاء الشعاعي المؤلف من كل المتتاليات الحقيقية المحدودة: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ المزود بـالعمليتين المعتـادتين (الخاصتين بالاحداثيات) وبالنظيم المعرف بالدستور:

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|$$

إن مسلمات الفضاء الشعاعي النظيمي محققة بطبيعة الحال. زيادة على ذلك فإن الفضاء X تام، نستطيع اثبات ذلك مباشرة أو بذكر النظرية الخاصة بتمام الفضاء $R^s(M)$ المؤلف من كل التوابع الحقيقية المحدودة والمستمرة على فضاء متري M (12 .32 ـ س)، إذ أن هذا الفضاء المتري هو مجموعة الاعداد الطبيعية المزود بالمسافة المعتادة على المستقيم العددي.

ب. لتكن $f_1, f_2, \ldots$ متتالية اعداد حقيقية بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ حينئذ تكون العبارة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi_n \qquad (1)$$

معرفة من اجل كل $X \ni x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ ولدينا المتراجحة:

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |\xi_n| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \qquad (2)$$

تمثل العبارة (1)، بطبيعة الحال، تابعية خطية على الفضاء X . تبين المتراجحة (2) ان هذه التابعية محدودة على كرة الوحدة في الفضاء X ، وبالتالي فهي مستمرة بالإضافة الى ذلك يحقق نظيمها المتراجحة:

$$\|f\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \qquad (3)$$

نعتبر قيمة التابعية f عند الشعاع $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ، حيث: $\xi_k = \operatorname{sgn} f_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. نلاحظ ان الشعاع x_0 ينتمي الى كرة الوحدة في X . لدينا:

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \operatorname{sgn} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

ومنه:

$$\|f\| = \sup_{|x|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(x_0)| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \qquad (4)$$

بمقارنة المتراجحتين (3) وَ (4) نرى أن:

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \qquad (5)$$

إن التابعيات ذات الشكل (1) لا تغطي مجموعة كل التابعيات الخطية المستمرة على الفضاء X . الا اننا إذا اعتبرنا فضاءات جزئية من الفضاء X فان الدستور (1) يعطي الشكل العام للتابعية الخطية المستمرة. يوجد فضاء جزئي من هذه الفضاءات في جـ.

جـ. نرمز بـ X_0 لمجموعة كل العناصر $X \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ التي تحقق $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$. من الواضح ان X_0 فضاء جزئي من الفضاء X . لنثبت أن هذا الفضاء الجزئي مغلق. ليكن:

$$x_m = \{\xi_n^{(m)}\} \in X_0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$x = \{\xi_n\} = \lim_{m\to\infty} x_m.$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، نبحث عن عدد طبيعي m بحيث: $\|x_m - x\| = \sup_n |\xi_n^{(m)} - \xi_n| < \varepsilon/2$ ثم نبحث عن عدد p بحيث يكون $|\xi_n^{(m)}| < \varepsilon/2$ من اجل كل $n \geqslant p$. لدينا أيضا من اجل $n \geqslant p$ في هذه الحالة: $|\xi_n| \leqslant |\xi_n - \xi_n^{(m)}| + |\xi_n^{(m)}| < \varepsilon$ ، وهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

بما أن المجموعة X_0 مغلقة في فضاء تام X فإن الفضاء النظيمي X_0 تام.

د. نضع الآن $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ حيث يحتل 1 الرتبة n . من اجل كل $X_0 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ لدينا:

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{m} \xi_n e_n\right\| = \|(\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots) - (\xi_1, \ldots, \xi_m, 0, \ldots)\| =$$
$$= \|(0, \ldots, 0, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots)\|$$

وإذا كان العدد N مختارا من اجل $\varepsilon > 0$ معطى بحيث $|\xi_m| < \varepsilon$ من اجل $m > N$، فإننا نحصل على $\|x - \sum_1^m \xi_n e_n\| < \varepsilon$ ، وهكذا:

$$x = \sum_1^\infty \xi_n e_n$$

حيث السلسلة متقاربة بالنسبة لنظيم الفضاء X_0. بصفة خاصة، نرى أن المجموعة المؤلفة من العناصر $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ التي لها احداثيات ξ_n منعدمة ابتداء من احداثية ما، تمثل مجموعة كثيفة اينما كان في X_0 .

ر . نفرض ان متتالية $\{f_k\}$ تجعل السلسلة $\sum_1^\infty f_k \xi_k$ متقاربة مهما كان $x = \{\xi_n\} \in X_0$. عندئذ تتقارب السلسلة $\sum_1^\infty |f_k|$ أيضا. ذلك أننا إذا اعتبرنا التابعيات الخطية:

$$\varphi_n(x) = \sum_1^n f_k \xi_k \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

فإننا نلاحظ فرضا بأن لقيم هذه التابعيات نهاية لما $n \to \infty$ وذلك مهما كان $x \in X_0$. عندئذ تبين 12 .47 ـ ب أن نظيمات هذه التابعيات φ_n محدودة من الاعلى بنفس الثابت C . نطبق (5) فنحصل من اجل كل n على المتراجحة:

$$\|\varphi_n\| = \sum_1^n |f_k| \leqslant C$$

ومنه يأتي تقارب السلسلة $\sum_1^\infty |f_k|$

س. نثبت الآن بأن العبارة (1) تعطي الشكل العام لتابعية خطية مستمرة على الفضاء X_0 . لتكن $f(x)$ تابعية خطية مستمرة على الفضاء X_0 . نضع $f(e_k) = f_k$ ونشكل متتالية التابعيات الخطية المستمرة $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k \xi_k$ ($n = 1, 2, \ldots$). بما ان المساواة $x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$ محققة من اجل كل $x \in X_0$ والتابعية f مستمرة، فإن:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k$$

وهذا من اجل كل $x \in X_0$ ، نرى بذلك ان التابعية f تعمل حسب

الدستور (1) حيث السلسلة $\sum_1^\infty |f_k|$ متقاربة حسب ر. انتهى إذن برهان قضيتنا.

نلاحظ أيضا بأن النظيم $\|f\|_0$ للتابعية f في الفضاء X_0 يساوي النظيم في X بـأكملـه. ذلـك انـه مـن البـديهي أن $\|f\|=\sum_1^\infty |f_k|$ $\|f\|_0 \leqslant \|f\|$. مـن جهـة أخـرى بتطبيـق التـابعيـة f على الشعـاع:

$X_0 \ni x_n = \{\operatorname{sgn} f_1, \ldots, \operatorname{sgn} f_n, 0, 0, \ldots\}$ نحصل على:

$$f(x_n) = \sum_1^n f_k \operatorname{sgn} f_k = \sum_1^n |f_k|$$

ومنـه $\|f\|_0 \geqslant \sum_1^n |f_k|$ مـن اجـل كـل $n = 1, 2, \ldots$ بحيـث $\|f\|_0 \geqslant \sum_1^\infty |f_k|$. وبالتالي $\|f\|_0 = \sum_1^\infty |f_k| = \|f\|$ ، وهو ما أكدناه.

ص. نعتبر على وجه الخصوص التابعية $g_k(x) = \xi_k$ (التي تصل كل قيمة x باحداثيتها ذات الرتبة k). نحصل هذه التابعية من (1) بوضع $f_k = 1$ ، $f_m = 0$ من اجل $m \neq k$. إن نظيم التابعية يساوي 1 مهما كان $k = 1, 2, \ldots$. لـديـنـا، زيـادة على ذلـك مـن اجـل كـل $X_0 \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$:

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \xi_k$$

وهكذا فإن متتالية التابعيات g_k متقاربة بقوة نحو الصفر لما $k \to \infty$ (37.12 ـ د) على الرغم من نظيمات هذه التابعيات ليست كذلك.

ط. نرمز بـ X_1 لمجموعة كل العناصر $X \ni x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ القابلة للنهاية المنتهية للمتتالية ξ_n لما $n \to \infty$ تشكل المجموعة X_1 ، بطبيعة الحال، فضاء جزئيا من الفضاء X ويحوي الفضاء الجزئي X_0 والفضاء الوحيد البعد $\{\lambda e\}$ المؤلف من العناصر ذات الشكل $\lambda e = \{\lambda, \lambda, \lambda, \ldots\}$ ، من البديهي ان X_1 هي المجموع المباشر للفضاءين الجزئيين المذكورين. إن الفضاء الجزئي X_1 مغلق في الفضاء X ، يمكننا اثبات ذلك مباشرة أو بذكر النظرية 32.12 ـ س مع العلم انه يمكن اعتبار X_1 كفضاء متري مؤلف من الاعداد الطبيعية $1, 2, \ldots$ والرمز ∞ : مزود بمسافة تجعل

الاعداد $1, 2, \ldots$ نقاطا منعزلة و $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ (راجع 53.3 ـ س).

ع. هناك في الفضاء الجزئي X_1 تابعية خطية مستمرة لا تكتب على الشكل (1) بصفة خاصة:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n$$

لو كان بالامكان وضعها على الشكل (1) باعتبار اعداد $f_1, f_2, \ldots$ بحيث:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \xi_k = \lim_{n\to\infty} \xi_n,$$

لحصلنا بوضع $x = e_m$ ، $L(e_m) = f_m = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$)؛ لكن ذلك يؤدي من اجل $x = e = (1, 1, \ldots)$ الى $L(e) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot 1 = 0$ الذي يناقض: $L(e) = \lim 1 = 1$.

وهكذا فإن التابعية $L(x)$ ليست تابعية من النمط (1) الآ انها نهاية قوية (37.12 ـ د) لتابعيات من الشكل (1) على الفضاء X_1 : لدينا بطبيعة الحال من اجل كل $x \in X_1$

$$L(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \cdot$$

67.12 . جمع المتتاليات المحدودة

أ. نعلم انه توجد متتاليات محدودة وغير محدودة، مؤلفة من اعداد حقيقية. نود هنا تعميم مفهوم النهاية لمتتالية متقاربة الى متتاليات الاعداد الحقيقية المتباعدة بالمفهوم المعتاد. بعبارة اخرى فالامر يتعلق بوصل كل متتالية $x = \{a_n\}$ من فضاء جزئي مغلق $X^* \subset X$ يحوى الفضاء الجزيئي X_1 المؤلف من المتتاليات المتقاربة بعدد $\text{Lim}\, a_n$ يسمى نهاية معممة ويحقق الشروط الطبيعية التالية:

1) $\text{Lim}\,(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \text{Lim}\, a_n + \beta \text{Lim}\, b_n$ مهما كانت المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ في X^* والعددان α و β ؛

2) $\text{Lim}\, a_n = \lim a_n$ من اجل كل متتالية متقاربة ؛

3) $\text{Lim}\ a_n$ تابعية محدودة ومستمرة على X^* .

ب. نعتبر، كمثال، النهاية بمفهوم سيزارو Cesàro). النهاية بمفهوم سيزارو لمتتالية $\{a_n\}$ ، التي نرمز لها بـ $\text{C-lim}\ a_n$ ، هي تعريفا النهاية المعتادة (إن كانت موجودة) لمتتالية المتوسطات الحسابية لـ a_n :

$$\text{C-lim}\ a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

يمكن البرهان على ان نهاية سيزارو تحقق الشروط 1) ـ 3) على ساحة وجودها؟ لن نتناول هذه النقطة باسهاب لأننا سنجده اسفله نظرية اعم. نلاحظ انه قد توجد نهاية سيزارو دون وجود النهاية المعتادة فمن الواضح مثلا ان:

$$\text{C-lim}\ (0, 1, 0, 1, \ldots) = \frac{1}{2}$$

ج. ان التابعيات من الشكل 57. 12 (1) لا تصلح لإنشاء نهاية معممة لاننا لا نستطيع وضع حتى النهاية المعتادة $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$ على الفضاء الجزيئي X_1 على هذا الشكل (57. 12 ـ ع). إن النهاية المعتادة هي، كما رأينا في 57. 12 ـ ع، النهاية القوية للتابعيات الخاصة ذات الشكل 57. 12 (1) علينا إذن دراسة امكانية الحصول على النهاية المعممة كنهاية قوية لتابعيات 57. 12.(1) للحصول على متتالية تابعيات من هذا الشكل يجب تعاطي مصفوفة غير منتهية $T = \| t_{km} \|$ ، $m = 1, 2, \ldots$ تعرف سطورها التابعيات:

$$\text{T}_k (x) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} \xi_m$$

إذا كانت النهاية المعتادة لمتتالية الاعداد $\text{T}_k (x)$ موجودة لما $k \to \infty$ ، فإننا نسميها T ـ نهاية ونرمز لها بـ:

$$\text{T} (x) = \lim_{k \to \infty} \text{T}_k (x) = \text{T-}\lim_{n \to \infty} \xi_n$$

كيف يجب ان تكون المصفوفة T لكي تكون ساحة تعريف التابعية $\text{T} (x)$ تحوى كل المتتاليات المتقاربة ولكي تتوفر الشروط 1) ـ 3) التي تميز نهاية معممة؟ نجد الجواب في النظرية التالية:

نظرية (توبليتز Tœplitz). تكون التابعية $T(x)$ نهاية معممة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |t_{km}| \leqslant c \qquad (1)$$ (حيث، لا يتعلق بـ k)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1 \qquad (2)$$

$$\lim_{k\to\infty} t_{km} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (3)$$

البرهان. لنثبت لزوم الشروط 1) ـ 3) إذا كانت التابعية $T(x)$ معرفة فالامر كذلك بخصوص كل التابعيات $T_k(x)$ وهذا مهما كانت المتتالية $x = \{\xi_n\}$ المتقاربة نحو الصفر. ينتج من ذلك بفضل 57.12 ـ د ان كل سلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} |t_{km}|$ متقاربة. ثم، نظرية باناخ ـ ستينهاوس 47.12 ـ ب، ينتج من تقارب المتتالية $T_k(x)$ من اجل كل $x \in X_0$ ان نظيمات التابعيات T_k محدودة؛ بكتابة هذه النظيمات كما جاء في 12 . 57 ـ ب نرى ان الشرط (1) محقق. بأخذ الـ T ـ نهاية للمتتالية $x = (1, 1, \ldots)$ نرى ان الشرط (2) محقق ايضا. ونأخذ نفس النهاية للشعاع e_k (57.12 ـ د) فنثبت الشرط (3).

نبرهن الآن على ان الشروط 1) ـ 3) تجعل التابعية $T(x)$ نهاية معممة إذا كانت القيمتان $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$ و $T(y) = \lim_{k\to\infty} T_k(y)$ معرفتين من اجل متتاليتين $x = \{\xi_n\}$ و $y = \{\eta_n\}$، فإن العدد:

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim T_k(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim T_k(x) + \beta \lim T_k(y)$$

معرف مهما كان الثابتان α و β؛ وهكذا فإن ساحة التعريف X_T للتابعية $T(x)$ فضاء شعاعي اما التابعية فهي خطية على هذه الساحة لدينا بخصوص هذه المتتالية $e = (1, 1, 1, \ldots)$.

$$T_k(e) = \sum_{m=1}^{\infty} t_{km}, \quad T(e) = \lim_{k\to\infty} T_k(e) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_{km} = 1$$

وهذا بفضل الشرط (2). وبالتالي إذا تحققنا من المساواة (2) الظاهري في تعريف النهاية المعممة يكفي الاقتصار على العناصر $x \in X_0$. إن التابعيات T_k في الفضاء X_0 محدودة، بالتنظيم، بـالثـابـت، حسـب الشرط (1).

ثم لـــديـنـــا مـــن اجـــل العنـــاصر $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$:
$\lim T_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_1^n t_{km}\xi_m = 0$ حسب الشرط (3). تشكل هذه العناصر مجموعة كثيفة اينما كان في X_0 (57.12 ـ د)، وبذلك تأتي النتيجة المطلوبة من التوطئة 37.12 د. اخيرا تأتي النتيجة القائلة ان التابعية $T(x)$ محدودة على الفضاء الجزئي X_T من 47.12 ـ ج، يعطي 47.12 ـ د التقدير التالي الخاص بنظم T :

$$\| T \| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \| T_k \| = \varliminf_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} | t_{kn} |$$

لما كان $Te = 1$ فان لدينا التقدير التالي للنظيم:

$$\| T \| \geqslant 1$$

يبقى ان نبني بان الفضاء الجزيئي X_T مغلق في الفضاء X. نعتبر الملاصق $\bar{X}_T$ للفضاء الجزيئي X_T. إن المجموعة X_T كثيفة اينما كان في $\bar{X}_T$، التابعيات $T_k(x)$ متقاربة عند كل نقطة $x \in X_T$ ونظيماتها محدودة بمراعاة 37.12 ـ د ينتج ان التابعيات $T_k(x)$ متقاربة ايضا على $\bar{X}_T$. نرى أن ساحة تقارب X_T للمتتالية T_k تحوى ملاصقها $\bar{X}_T$؛ إذن $X_T = \bar{X}_T$، وبذلك ينتهي برهان النظرية.

77.12. امثلة.

أ توافق النهاية المعتادة $\lim \xi_n$ (المعرفة على X_1 فقط) المصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

ب. إن نهاية سيزارو (67.12 ـ ب) معطاة بالمصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

التي تتوفر من اجلها شروط نظرية توبليتز، وبالتالي فإن نهاية سيزارو تتمتع بكل خاصيات النهاية المعممة.

ج. كمثال ثالث نشير الى صف مصفوفات يحوى المصفوفتين السابقتين كحالتين خاصيتين. لتكن $p_0 > 0$ ، $p_1 \geqslant 0$ ، $p_2 \geqslant 0$ ، ... متتالية وَ $P_n = \sum_0^n p_k \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ؛ عندئذ تعرف المصفوفة:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ p_1/P_1 & p_0/P_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ p_2/P_2 & p_1/P_2 & p_0/P_2 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n/P_n & p_{n-1}/P_n & p_{n-2}/P_n & \ldots & p_0/P_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

طريقة جمع وضعها فورونوي (Voronoi) نلاحظ ان الشرطين (1) وَ (2) من نظرية توبليتز محققة هنا مباشرة. اما الشرط (3) من اجل $m = 1$ فهو يكافيء الشرط $p_n/P_n \to 0$ لأن:

$$\frac{p_{n-m}}{P_n} \leqslant \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}}$$

والشرط (3) ينتج من الشرط $p_n/P_n \to 0$ مهما كان m. وبالتالي فإن الشرط: $p_n/P_n \to 0$ لازم وكاف لكي تكون مصفوفة فورونوى مصفوفة تويليتز إذا كان $p_0 = 1$ ، $p_1 = p_2 = \ldots = 0$ فإننا نعود الى الجمع المعتاد؛ إذا كان $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = 1$ فإننا نجد من جديد الجمع بمفهوم سيزارو.

87. 12 . نشير مرة اخرى لبعض خاصيات الـ T ـ نهاية:

أ. يحدث، في بعض الـ T ـ نهايات، ان يتطابق الفضاء X_T والفضاء X_1 ، كما هو الحال في النهاية المعتادة $\lim_{n\to\infty} \xi_n$. السؤال المطروح هو كيف يمكن الفصل بين هذه الحالات «القليلة الاهمية» للنهاية المعممة. هناك نظرية لـِ أ برودنو A. Broudno [2] نقول ان $X_T = X_1$ إذا وفقط إذا وجد ثابت δ_0 بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل $X \ni x = \{\xi_n\}$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |T_n(x)| \geqslant \delta_0 \overline{\lim_{n\to\infty}} |\xi_n|$$

الآ ان هذا الشرط صعب التحقيق. هناك ايضا شرط من المساواة $X_T = X_1$ بدلالة الاعداد t_{kn} نفسها، لكنه كاف وغير لازم (اغنيو Agnew): يكون $X_T = X_1$ إذا تحققت المتراجحة (18):

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_n [t_{nn} - \sum_{k\neq n} |t_{kn}|] > 0$$

ب. من جهة اخرى هل يمكن انشاء مصفوفة T تحقق $X_T = X$؟إن ذلك مستحيل (راجع التمرين 8). ورغم ذلك ينتج من بعض الاعتبارات العامة انه توجد نهاية معممة $\mathrm{Lim}\, \xi_n$ معرفة على كل الفضاء X وبحيث $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1}$ [20]؛ الآ ان مثل هذه النهاية المعممة لا يمكن تقديمها في دستور صريح.

جـ. بخصوص بعض المصفوفات T فإن الكمية $T(x)$ قد تخرج من المجال $\Delta x = [\varliminf \xi_n, \varlimsup \xi_n]$ الذي يحوي كل القيم الملاصقة للمتتالية ξ_n . يتوفر ذلك في المصفوفة التالية مثلا:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

والعنصر $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ من الطبيعي ان نطرح السؤال التالي: ما هي الشروط التي ينبغي فرضها على المصفوفة T حتى تكون كل القيم الملاصقة للمتتالية $T_1(x), T_2(x), \dots$ (من اجل $x \in X$) منتمية للمجال $\Delta(x)$ ؟ نجد الجواب في النظرية التالية التي تعود الى روبنسون (Robinson) (راجع التمرين 9): تتحقق الخاصية المشار اليها آنفا إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} \| T_n \| = 1$

8. 12. الجبور النظيمية

18. 12. أ يسمى فضاء نظيمي U الذي يمثل في نفس الوقت جبراً (81. 12 ـ أ) يسمى نظيمياً إذا نتج عن $x_n \to x$ (بالنسبة لنظيم U): $x_n y \to xy$ و $y x_n \to yx$ من اجل كل $y \in U$.

ب. وهكذا فإن المجموعة $L(X)$ المؤلفة من كل المؤثرات المحدودة التي تعمل في فضاء باناخي X فضاء نظيمي تام (37.12 ـ ب) وفي نفس الوقت جبر (91.12 ـ ع، 17.12 ـ ف) نلاحظ في هذا الجبر ان النظيم يحقق المتراجحة 17.12(2):

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \| \qquad (1)$$

ينتج من ذلك أن $L(X)$ جبر نظيمي: بصفة خاصة إذا كان $A_n \to A$ وكان B مؤثرا كيفيا من $L(X)$ فإن:

$$\| A_nB - AB \| = \| (A_n - A) B \| \leqslant \| A_n - A \| \| B \| \to 0$$

مما يعطي $A_nB \to AB$.

جـ. نشير الى أن هناك متراجحة من النمط (1) قائمة في كل جبر نظيمي تام وهذا بعد الانتقال الى نظيم آخر (سنرى ذلك في 88.12). ولذا يمكننا تعويض شرط استمرار الضرب، $x_n \to x$ يستلزم $x_ny \to xy$ وَ $yx_n \to yx$ مهما كان y، بشرط اقوى منه:

$$| xy | \leqslant | x | | y | \qquad (2)$$

وهذا مهما كان x وَ y في U.

د. نفرض فيما يلي، اضافة الى المسلمة (2)، بأن جبرا نظيميا معتبرا يقبل وحدة e (81.12 ـ ج) وبأن $| e | = 1$. (إن الفرض الاخير محقق بذاته في جبر المؤثرات الخطية التي تعمل في فضاء نظيمي X، الوحدة هنا هي المؤثر المطابق.)

28.12 أ. إن وحدة جبر نظيمي، كاي جبر، عنصر قابل للقلب لأن $ee = e$ لنثبت في جبر نظيمي تام U إن كل الكرة $\{x : | e - x | < 1\}$ مؤلفة من عناصر قابلة للقلب.

نعتبر من اجل لذلك السلسلة:

$$y = e + (e - x) + (e - x)^2 + \dots \qquad (1)$$

لدينا من الشرط (2): $| (e - x)^n | \leqslant | e - x |^n$ إذن فإن السلسلة

متقاربة حسب مقياس فيـــرشتراس 12 .73 ـ ج. بضرب هذه السلسلة في $x = e - (e - x)$ نحصل على:

$$y\,[e - (e - x)] =$$
$$= [e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots] - [(e - x) + (e - x)^2 + \ldots] = e$$

وبالتالي فإن مجموع السلسلة (3) هو بالضبط العنصر المقلوب لـ x .

ب. ينتج من التقدير:

$$|e - y| = |(e - x) + (e - x)^2 + \ldots| \leqslant \frac{|e - x|}{1 - |e - x|}$$

ان $x \to e$ يستلزم $y \to e$. يمكن القول ان مؤثر (غير الخطي) الضرب في $y = x^{-1}$ مستمر عند $x = e$.

12 .38 . أ. نرمز بـ O لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في جبر نظيمي تام U . لنثبت ان O مجموعة مفتوحة في U وان المؤثر x^{-1} مستمر على كل O.

بما ان: $xx^{-1} = e$ ، لـدينـا بفضـل (2) مـن اجـل كـل h بحيـث $|h| < 1/|x^{-1}|$:

$$|(x + h)\,x^{-1} - e| = |hx^{-1}| \leqslant |h|\,|x^{-1}| < 1$$

مما يجعل العنصر $(x + h)\,x^{-1}$ قابلا للقلب حسب 12 .28 ـ أ، اي انه يوجد عنصر $z\,(h)$ بحيث: $(x + h)\,x^{-1}z\,(h) = e$. عندئذ يكون $x + h$ أيضا عنصرا قابلا للقلب: عنصره المقلوب هو بطبيعة الحال العنصر $x^{-1}z\,(h)$. إذا كان $h \to 0$ فإن: $(x + h)\,x^{-1} \to xx^{-1} = e$ بحيـث ان $z\,(h) \to e$ بفضـل 12 .28 ـ ب؛ ينتـج مـن ذلـك $(x + h)^{-1} = x^{-1}z\,(h) \to x^{-1}$ ، وهو ما يبين استمرار المؤثر x^{-1} على المجموعة O .

ب. رأينا أن كل عنصر قابل للقلب x ينتمي الى المجموعة O ولكرة نصف قطرها $r \geqslant 1/|x^{-1}|$. يعني ذلك أن $|x^{-1}| \geqslant 1/r$ ؛ وهكذا عندما يقترب x من حافة المجموعة O فإننا نجد بالطبع $r \to 0$ ونظيم العنصر x^{-1} يتزايد لا نهائيا.

12 .48 . إن كل عنصر غير قابل للقلب z واقع على حافة الساحة O يمثل « قاسما معمما للصفر »، يعني ذلك وجود متتالية عناصر $y_1, y_2, \ldots$ تحقق $|y_n| \geqslant c > 0$ ولا تحقق $zy_n \to 0$. نحصل على هذه المتتالية بوضع $y_n = x_n^{-1}/|x_n^{-1}|$ حيث $x_n \in O$ وَ $x_n \to z$. حينئذ يأتي من 12 .38 ـ ب :

$$|zy_n| \leqslant |(z - x_n)\, y_n| + |x_n y_n| \leqslant |z - x_n| + 1/|x_n^{-1}| \to 0$$

وهو المطلوب.

على العموم فإن القواسم المعممة للصفر لا تقبل القلب لأن إذا كان z قابلا للقلب فإن $zy_n \to 0$ يستلزم $z^{-1}zy_n = y_n \to 0$. لكن يمكن لِعنصر غير قابل للقلب لا يساوي نهاية عناصر قابلة للقلب الاّ يكون قاسما معمما للصفر (التمرين 10)

12 .58 . أ . نسمي من الآن كل جبر عقدي نظيمي وتام U جبر غلفاند Gelfand (أو جبرا غلفانديا).

مهما كان العنصر x من جبر غلفاند فإن العبارة $e - \lambda x$ عنصر قابل للقلب من اجل كل λ عقدي صغير بكفاية، مثلا من اجل $|\lambda| < 1/|x|$ عندما $x \neq 0$ ؛ وبالتالي لدينا حسب 12 .28 ـ أ :

$$(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

إن نصف قطر تقارب السلسلة (1) هو (12 .66):

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x^n|}} \qquad (2)$$

أما في الحالة التي يكون فيها $\rho = \infty$ فالسلسلة متقاربة في كل المستوى الذي تنتمي له λ .

إن العنصر $x - \mu e$ قابل للقلب من اجل كل $|\mu|$ كبير بكفاية، مثلا من اجل $|x| < |\mu|$ ؛ ينتج ذلك مباشرة من الدستور $x - \mu e = -\mu\,(e - \mu^{-1}x)$. تسمى مجموعة كل العناصر μ التي تجعل العنصر $x - \mu e$ غير قابل للقلب **طيف العنصر** x . إن التابع

$(x-\mu e)^{-1}$ معرف على متمم الطيف. ينتج من 38.12 ـ أ أن هذا المتمم مجموعة G مفتوحة في المستوى الذي تنتمي له μ ، إذ ان الطيف مغلق. ثم ينتج من 38.12 ـ أ ان $(x-\mu e)^{-1}$ تابع مستمر لـِ μ (قيمه في U) في الساحة G. لنثبت زيادة على ذلك انه تابع تحليلي (66.12) على G. لدينا المساواة.

$$\left[\frac{(x-(\mu+h)e)^{-1}-(x-\mu e)^{-1}}{h}\right](x-(\mu+h)e)(x-\mu e)= \tag{3}$$
$$=\frac{(x-\mu e)-(x-(\mu+h)e)}{h}=e$$

التي تثبت ان العنصر الموجود بين قوسين كبيرين قابل للقلب؛ مقلوبه هو $(x-(\mu+h)e)(x-\mu e)$ الذي يؤول الى $(x-\mu e)^2$ لما $h\to 0$ ، ومنه يأتي وجود النهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x-(\mu+h)e)^{-1}-(x-\mu e)^{-1}}{h}=[(x-\mu e)^2]^{-1} \tag{4}$$

يعني ذلك ان $(x-\mu e)^{-1}$ تابع تحليلي في الساحة G ، وهو المطلوب.

ب. نظرية. ان طيف أي عنصر x في جبر غلفاندي U مجموعة غير خالية.

البرهان. لتكن Γ دائرة في مستوى العناصر μ مركزها 0 ونصف قطرها $r > |x|$. نعتبر التكامل:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(x-\mu e)^{-1}\,d\mu \tag{5}$$

(الموجود بفضل استمرار التابع $(x-\mu e)^{-1}$ على الخط Γ). لنحسب I بواسطة التعويض $\lambda=\mu^{-1}$ وباستعمال النشر (1) ودساتير 33.10 ـ أ. لدينا:

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\mu|=r}\mu^{-1}(e-\mu^{-1}x)^{-1}\,d\mu=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=1/r}(e-\lambda x)^{-1}\frac{d\lambda}{\lambda}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=1/r}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m x^m\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}x^m\oint_{|\lambda|=1/r}\lambda^{m-1}\,d\lambda=-e$$

لو كان طيف العنصر x خاليا لكان التابع $(x-\mu e)^{-1}$ تحليليا في كل مستوى العناصر μ ويكون التكامل (5) منعدما حسب نظرية كوشي. ينتهي بذلك برهان النظرية.

ج. نتيجة. (نظرية غلفاند ـ مازور Gelfand - Mazur). إذا كان جبر غلفاندي U حقلا، أي إذا قبل كل عنصر منه x غير منعدم مقلوبا فإن الجبر U هو حقل الاعداد العقدية.

لرؤية ذلك نعتبر عنصرا x كيفيا من الجبر U وعددا μ من طيفه بحيث لا يكون للعنصر $x - \mu e$ مقلوب. لكن الفرض يقول ان العنصر الوحيد الذي ليس له مقلوب هو 0، إذن $x - \mu e = 0$ أي $x = \mu e$ وهو المطلوب.

12 .68 . أ. نعتبر الحالة التي يكون فيها الجبر U هو الجبر $U(C_n)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية في فضاء C_n بعده منته مزود بنظيم كفي (رأينا في 12 .53 ـ ر أن كل النظيات في C_n متكافئة). إن كل مؤثر خطي A مستمر في هذه الحالة لأن احداثيات الشعاع Ax توابع خطية، وبالتالي مستمرة، لإحداثيات الشعاع x . وهكذا فإن الجبر $U(C_n)$ مطابق للجبر $L(C_n)$ المؤلف من كل المؤثرات المحدودة في الفضاء C_n .

إن الطيف، بمفهوم التعريف 12 . 58 أ، للعنصر A هو في هذه الحالة مجموعة كل القيم الذاتية للمؤثر A : ذلك ان المؤثر $A - \mu E$ يكون غير قابل للقلب إذا وفقط إذا كان: $\det \|A - \mu E\| = 0$ ؛ لكننا نلاحظ ان هذه الاخيرة هي المعادلة التي تعرف القيم الذاتية للمؤثر A . نرى ان تعريف الطيف في 12 .58 ـ أ يُكافيء، في الحالة الراهنة، تعريف طيف مؤثر A الوارد في 12 .91 ـ د. سمح لنا طيف مؤثر A في 12 .91 ـ د، مع مضاعفاته، بوضع جبر كل المؤثرات $P(A)$ ، بطريقة تشاكلية، على شكل جبر المدونات على طيف المؤثر A ؛ كما سمح بانشاء تماثل غامر من الجبر $U(G)$ المؤلف من التوابع التحليلية في ساحة G تحوي الطيف على الجبر $P(A)$.

ب. إن التماثلات السابقة موجودة في حالة أي جبر غلفاندي. ليكن $S = S_x$ طيف عنصر $x \in U$ ؛ نعلم ان S مجموعة غير خالية ومغلقه

ومحدودة في المستوى العقدي. ليكن $U(S)$ جبر كل التوابع التحليلية $f(\lambda)$ على المجموعة S (كل واحد منها تحليلي في ساحة تحوي المجموعة S).

نظرية. يوجد تماثل من الجبر $U(S)$ في الجبر U يحول التابع $f(\lambda) \equiv 1$ الى e والتابع $f(\lambda) \equiv \lambda$ الى العنصر x وكل متتالية توابع $f_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ متقاربة نحو تابع $f(\lambda)$ بانتظام على ساحة $S \subset H$ الى متتالية عناصر $f_n \in U$ متقاربة بالنظيم نحو العنصر f الموافق للتابع $f(\lambda)$.

البرهان. إن التماثل المطلوب معطى بالدستور:

$$f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda \tag{1}$$

حيث Γ حافة مغلقة تقع في الساحة التي يكون فيها التابع $f(\lambda)$ تحليليا وتحيط (مرة واحدة) بالمجموعة S. بالاعتماد على نظرية كوشي نرى ان التكامل (1) لا يتعلق باختيار هذه الحافة. يحول التطبيق (1) التابع $f(\lambda) \equiv 1$ الى العنصر e ذلك ما اثبت في 58.12 ـ ب؛ نبرهن بطريقة مماثلة أن التابع $f(\lambda) \equiv \lambda$ يتحول الى العنصر x. من الواضح ان الدستور (1) يعرف تطبيقا خطيا من $U(S)$ في U؛ يجب ان نثبت بان جداء تابعين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يتحول الى جداء العنصرين الموافقين لـ f و g.

ننطلق من المساواة:

$$(\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}}{\mu - \lambda} \tag{2}$$

الناتجة من 58.12 (3) بتعويض $\mu + h$ بـ λ. نعتبر منحنيين مغلقين Γ_f و Γ_g يحيطان بالمجموعة S في الساحة التي يكون فيها التابعين $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ تحليلين بحيث يغلف المنحنى Γ_g المنحنى Γ_f بدون ان تكون لها نقاط مشتركة. بمكاملة المساواة (2)، بعد ضربها في $f(\lambda)\, g(\mu)/(2\pi i)^2$ ، في البداية على طول المنحنى Γ_f ثم على طول

Γ_g وبتبديل التكاملين فيما بينهما حسب 42.10 نحصل على:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_f}(\lambda e-x)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_g}(\mu e-x)^{-1}g(\mu)\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_f}(\lambda e-x)^{-1}f(\lambda)\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_g}\frac{g(\mu)\,d\mu}{\mu-\lambda}\right\}d\lambda+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_g}(\mu e-x)^{-1}g(\mu)\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_f}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-\mu}\right\}d\mu.$$

بما ان λ نقطة تقع داخل الساحة المحدودة بالمنحنى Γ_g فإن التكامل الاول الموجود بين حاضنتين يساوي $g(\lambda)$ ؛ ثم إن μ يقع خارج الساحة المحدودة بالمنحنى Γ_f ولذا فإن التكامل الثاني الموجود بين حاضنتين منعدم. نحصل في الختام على المساواة:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_f}(\lambda e-x)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_g}(\mu e-x)^{-1}g(\mu)\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_f}(\lambda e-x)^{-1}f(\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda$$

التي تبين ان الدستور (1) يصل جداء تابعين $f(\lambda)$ وَ $g(\lambda)$ بجداء العنصرين الموافقين لـِ f وَ g .

لنعالج المقولة الاخيرة في النظرية. نفرض ان متتالية توابع $f_n(\lambda)$ متقاربة نحو تابع $f(\lambda)$ بانتظام في ساحة G تحوي المجموعة S . نختار حافة مغلقة Γ في الساحة G ؛ لدينا التقدير:

$$\|f-f_n\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\oint(\lambda e-x)^{-1}[f(\lambda)-f_n(\lambda)]\,d\lambda\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\lambda\in\Gamma}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\|(\lambda e-x)^{-1}\|\,|d\lambda|$$

ومنه يأتي $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$. انتهى البرهان.

نلاحظ ان التطبيق (1) ليس عموما تماثلا متباينا ويمكنه تحويل تابع $f(\lambda)\not\equiv 0$ الى عنصر منعدم من الجبر U .

ج. بصفة خاصة، من اجل كل عنصر $x\in U$ فإن التوابع e^{tx} ،

$\cos tx$ ، $\sin tx$ معرفة؛ نلاحظ ان خاصيات التماثل تستلزم المساواة:

$$e^{(t_1+t_2)x} = e^{t_1x}e^{t_2x} \quad (t_1, t_2 \in C)$$

ينتج من المقولة الاخيرة في النظرية ان هذه التوابع يمكن أيضا تعريفها بواسطة سلاسل قوي:

$$e^{tx} = \sum_0^\infty \frac{t^n x^n}{n!},$$

$$\cos tx = 1 - \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^4}{4!}x^4 - \dots,$$

$$\sin tx = tx - \frac{t^3}{3!}x^3 + \frac{t^5}{5!}x^5 - \dots$$

78. 12 . يمكننا تمييز طيف كل عنصر يكتب على الشكل $f(x)$:

نظرية . إذا كان $f(\lambda)$ تابعا تحليليا على الطيف S_x لعنصر $x \in U$ فإن الطيف $S_{f(x)}$ للعنصر $f(x)$ (68. 12 ـ ب) يطابق مجموعة قيم $f(\lambda)$ من اجل $\lambda \in S_x$.

البرهان . ليكن $\lambda_0 \in S_x$ ، $\mu_0 = f(\lambda_0)$. إن التابع التحليلي $f(\lambda) - \mu_0$ ينعدم في $\lambda = \lambda_0$ ، وبالتالي يقبل التمثيل:

$$f(\lambda) - \mu_0 = (\lambda - \lambda_0)\, g(\lambda)$$

حيث $g(\lambda)$ تابع تحليلي ايضا في نفس الساحة التي يكون فيها $f(\lambda)$ تحليليا . لدينا من خاصيات تماثل f :

$$f(x) - \mu_0 e = (x - \lambda_0 e)\, g(x)$$

الاّ انه إذا كان $f(x) - \mu_0 e$ قابلا للقلب ، فإن الامر كذلك فيما يخص $x - \lambda_0 e$ (مقلوبه هو $g(x)(f(x) - \mu_0 e)^{-1}$) وهذا يناقض الفرض . إذن $S_{f(x)} \ni \mu_0$. وبالعكس ، ليكن $S_{f(x)} \ni \mu_0$ ، يوجد عندئذ $S_x \ni \lambda_0$ بحيث $f(\lambda_0) = \mu_0$. ذلك انه إذا كان التابع $f(\lambda) - \mu_0$ غير منعدم على S_x فإن التابع : $g(\lambda) = 1/[f(\lambda) - \mu_0]$ يصبح تحليليا على المجموعة S_x ، والعنصر الموافق له $g(x) \in U$ يصبح مقلوب : $f(x) - \mu_0 e$ ، مما يناقض الفرض $S_{f(x)} \ni \mu_0$. انتهى برهان النظرية .

12 .88 . نعود الى مسألة تغيير النظيم في جبر U الضرب فيه مستمر (أي ان $x_n \to x$ يستلزم $x_n y \to xy$ وَ $yx_n \to yx$)، هدفنا من وراء ذلك توفير الشرط 12 .18(2).

نظرية. من اجل كل جبر نظيمي تام U ذي وحدة، نظيمه $|x|_1$ ، يوجد نظيم $|x|_2$ يكافىء الاول ويحقق $|e|_2 = 1$ ، $|xy|_2 \leqslant |x|_2 |y|_2$

البرهان. يولد كل عنصر x من الجبر U المؤثر A_x وهو مؤثر الضرب في x المعرف بالدستور: $A_x y = xy$. ينتج من الفرض وخاصيات الجبر ان A_x مؤثر خطي مستمر. تشكل المؤثرات ذات الشكل A_x في الجبر L (U) المؤلف من كل المؤثرات الخطية المستمرة العاملة في U ، جبرا جزئيا V يكون فيه المؤثر الواحدي $E = A_e$ هو الوحدة.

لدينا بفضل خاصية تجميع الضرب:

$A_x (yz) = x (yz) = (xy) z = (A_x y) z$. من السهل ان نرى بأن هذه الخاصية تميز مؤثرات الجبر الجزئي V . ذلك انه إذا كان مؤثر A يحقق $A (yz) = Ay \cdot z$ من اجل كل y وَ z في U ، فإن وضع $Ae = x$ يعطينا: $Ay = A (ey) = (Ae) y = xy$، أي ان A هو مؤثر الضرب في x .

بعد اثبات هذه الخاصية نبين أن الجبر الجزئي V مغلق في الجبر L (U) . نفرض ان المؤثرات ... ,A_1, A_2 في V متقاربة (بالنسبة لنظيم L (U)) نحو مؤثر A . عندئذ تتقارب $A_n x$ نحو Ax من اجل كل $x \in U$. بما ان الضرب مستمر فإن لدينا:

$$A (xy) = \lim A_n (xy) = \lim (A_n x \cdot y) = \lim A_n x \cdot y = Ax \cdot y$$

ومنه يأتي حسب ما سبق، $A \in V$.

بما أن الجبر L (U) تام (12 .37 ـب) فإن الجبر الجزئي $V \subset L (U)$ المغلق في L (U) تام أيضا بوصفه فضاء نظيميا مزودا بنظيم L (U) .

لدينا الآن نظيمان في الجبر U : $|x|_1$ وَ:

$$|x|_2 = \|A_x\| = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |A_x y|_1 = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |xy|_1$$

والجبر U تام بالنسبة لكلا النظيمين. ثم لدينا:

$$|e|_2 = \|A_e\| = \|E\| = 1, \quad |x|_2 = \sup_{|y|_1 \leqslant 1} |xy|_1 \geqslant \left| x \frac{e}{|e|_1} \right|_1 = \frac{|x|_1}{|e|_1}$$

ومنه:

$$|x|_2 \geqslant c_1 |x|_1, \quad c_1 = \frac{1}{|e|_1}$$

إن النظيمين $|x|_1$ وَ $|x|_2$ متكافئتان حسب 27.12 ـ د، وهو المطلوب.

§ 9.12 . الخاصيات الطيفية للمؤثرات الخطية

19.12 . ينتمي كل مؤثر خطي محدود A يعمل في فضاء باناخي X الى الجبر L (X) المؤلف من كل المؤثرات الخطية المحدودة العاملة في الفضاء X . بما أن A ينتمي لهذا الجبر فهو يملك طيفا S_A (58.12 ـ أ) يتألف من الاعداد العقدية λ التي لا يقبل من اجلها المؤثر $A - \lambda E$ مقلوبا محدوداً. في حالة البعد المنتهي $(X = C_n)$ يرد طيف المؤثر A ، كما رأينا في 68.12 ـ أ، الى عدد منته، مثلا m ، من النقاط المتخالفة تمثل القيم الذاتية للمؤثر A . نعلم ان الفضاء C_n يقبل حينئذ التفكيك الى مجموع مباشر لـ m فضاء جزئيا لا متغيرة يملك المؤثر A في كل واحد منها طيفا مؤلفا من نقطة واحدة، ويمكن في هذه الحالة وصف طيف A وصفا كاملا (71.12 ـ س). في حالة البعد غير المنتهي فإن طيف المؤثر A مجموعة متراصة غير خالية من المستوى محتواة في القرص $|\lambda| \leqslant \|A\|$ ، أو على وجه التحديد، في القرص $|\lambda| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ (58.12 ـ أ)؛ لا يمكن الاتيان بمعلومات اوفر في الحالة العامة (راجع التمرين 11 حيث ننشيء مؤثر طيفه مجموعة متراصة كيفية من المستوى).

29.12 . أ . قد نجد في حالة البعد غير المنتهي عناصر λ من طيف المؤثر A التي لا تمثل قيما ذاتية لـِ A . بل يمكننا القول في هذه الحالة ان المفهوم

الذي يصبح طبيعيا ليس مفهوم القيمة الذاتية بل مفهوم القيمة الذاتية المعممة: القيمة الذاتية المعممة هي، تعريفا، عدد λ يقبل متتالية اشعة $x_1, x_2, \ldots$ تحقق: $0 < c \leqslant |x_n|$ و $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. من الواضح ان كل قيمة ذاتية لمؤثر هي قيمة ذاتية معممة لهذا المؤثر. إن كل قيمة ذاتيـة معممـة لمؤثـر A تنتمـي الى طيفـه؛ ذلـك ان إذا كـان $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ بخصوص متتالية x_n وكان المؤثر $A - \lambda E$ يقبل مقلوبا محدودا فإن $x_n = (A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)\, x_n \to 0$

ب. نثبت الآن ان كل نقطة على حافة طيف مؤثر A تمثل قيمة ذاتية معممة. لتكن A نقطة واقعة على حافة الطيف؛ بما أن $A - \lambda E$ يُساوي نهاية المؤثرات القابلة للقلب: $A - \mu E$ ، حيث $\mu \notin S_A$ فإن المؤثر المؤثر $A - \lambda E$ قاسم معمم للصفر بفضل 12 .48 ، توجد إذن متتالية مؤثرات P_n تحقق $\| P_n \| \geqslant c > 0$ ، لكن: $(A - \lambda E)\, P_n \to 0$ في الجبر L (X) . من اجل كل مؤثر P_n نختار شعاعا y_n بحيث $| y_n | = 1$ ، $| P_n y_n | \geqslant c/2$. بوضع $x_n = P_n y_n$ نجد: $| x_n | \geqslant c/2$ وكذا:

$$| (A - \lambda E)\, x_n | = | (A - \lambda E)\, P_n y_n | \leqslant \| (A - \lambda E)\, P_n \| \, | y_n | \to 0$$

وهو المطلوب.

أما فيما يخص النقاط الداخلية لطيف مؤثر A فهي ليست بالضرورة نقاطا ذاتية معممة (التمرين 10).

12 .39 . تسهل النظرية التالية أحيانا دراسة المؤثرات:

نظرية. نفرض ان الطيف S_A لمؤثر A اتحاد لمجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين S_1 وَ S_2 . حينئذ يكون الفضاء X قابلا للتفكيك الى مجموع مباشر لفضاءين جزئيين مغلقين X_1 وَ X_2 لا متغيرين بواسطة A بحيث ان طيف A باعتباره على الفضاء الجزئي X_1 هو المجموعة S_1 ، وطيف A باعتباره على الفضاء الجزئي X_2 هو S_2 .

البرهان. نستعمل التماثل من الجبر $U(S_A)$ المؤلف من التوابع التحليلية

على S_A في الجبر $L(X)$ الوارد ضمن 68.12 ـ ب. يعرف الدستور 68.12 (1) هذا التماثل، وهو:

$$f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda E - A)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda$$

حيث Γ منحن مغلق يحيط المجموعة S_A في الساحة التي يكون فيها التابع $f(\lambda)$ تحليلياً. في الحالة التي تكون فيها المجموعة S_A اتحادا لأجزائه المغلقة وغير المتقاطعة مثنى مثنى فقد يكون الامر كذلك فيما يخص المنحنى Γ. اما في الحالة الراهنة فإن المجموعة S_A اتحاد مجموعتين مغلقتين S_1 وَ S_2 بدون نقاط مشتركة والمنحنى Γ يمكن ان يتألف من منحنيين مغلقين Γ_1 وَ Γ_2 ، يحيط أولهما بالمجموعة S_1 وثانيهما بـِ S_2 .

إن التابع $e_1(\lambda)$ المساوي لـِ 1 على المجموعة S_1 وَ لـِ 0 على S_2 ينتمي الى الجبر $U(S_A)$ ؛ يضم الجبر $U(S_A)$ ايضا التابع $e_2(\lambda)$ المساوي لـِ 0 على المجموعة S_1 وَ 1 على S_2 . يتسع هذان التابعان بالخاصيات البديهية التالية:

$$e_1(\lambda) + e_2(\lambda) \equiv 1 \,(\text{sur } S_A)$$

على

$$e_1^2(\lambda) = e_1(\lambda)$$

$$e_2^2(\lambda) = e_2(\lambda), \quad e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) = e_2(\lambda)\, e_1(\lambda) = 0$$

نرمز بـِ E_1 وَ E_2 للمؤثرين الخطيين الموافقين على التوالي للتابعين $e_1(\lambda)$ وَ $e_2(\lambda)$. بمراعاة خاصيات التماثلات يأتي.

$$E_1 + E_2 = E, \;\; E_1^2 = E_1, \; E_2^2 = E_2, \; E_1E_2 = E_2E_1 = 0$$

لتكن X_1 مجموعة الحلول (في الفضاء X) للمعادلة $E_1x = x$ وَ X_2 مجموعة حلول المعادلة $E_2x = x$. بصفة خاصة فإن أي شعاع من الشكل $x = E_1y$ حل، من اجل كل y ، للمعادلة $E_1x = x$ لأن $E_1(E_1y) = E_1^2y = E_1y$ من الواضح أن X_1 وَ X_2 فضاءان جزئيان من الفضاء X ، مغلقان بفضل استمرار المؤثرين E_1 وَ E_2 . إذا كان $z \in X_1 \cap X_2$ فإن $z = E_1z = E_2z$ ؛ لكن

$E_1z = E_1(E_1z) = E_1(E_2z) = 0$، ومنه $z = E_1z = 0$. وهكذا فإن تقاطع الفضاءين الجزئيين X_1 وَ X_2 لا يحوي سوى الشعاع المنعدم. بتطبيق المؤثر $E = E_1 + E_2$ على شعاع y كيفي نجد $y = E_1y + E_2y$ ، حيث ينتمي الطرف الايسر الى X_1 والطرف الثاني الى X_2 . وبالتالي فإن الفضاء X مفكك الى مجموع مباشر من الفضاءات الجزئية X_1 وَ X_2 .

ليكن $x \in X_1$. عندئذ $Ax = A(E_1x) = E_1(Ax)$ ، إذن ينتمي Ax ايضا الى الفضاء الجزئي X_1 ؛ وبالتالي فإن X_1 لا متغير بواسطة المؤثر A . بطريقة مماثلة فإن X_2 لا متغير بواسطة A .

يبقى أن نبرهن على نتيجة النظرية. نضع $A_1 = AE_1$ ؛ إن A_1 وَ A متطابقان على الفضاء الجزئي X_1 ، و A_1 منعدم على X_2 . من جهة اخرى يمكن كتابة:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda e_1(\lambda) (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

يمكننا هنا تعويض المنحنى Γ بـ Γ_1 لان التابع $e_1(\lambda)$ منعدم على المنحنى Γ_2 . بعد ذلك يمكن تعويض التابع $e_1(\lambda)$ بـ 1 ؛ نحصل في الختام على:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \lambda (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

ثم مهما كان μ لدينا:

$$A_1 - \mu E_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) (\lambda E - A)^{-1} d\lambda$$

نفرض ان μ خارج المنحنى Γ_1 ، ننشيء المؤثر:

$$Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{(\lambda E - A)^{-1} d\lambda}{\lambda - \mu}$$

تعطينا نفس الاستدلالات الواردة في 68.12 ـ ب

$$(A_1 - \mu E_1) Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) \frac{(\lambda E - A)^{-1} d\lambda}{\lambda - \mu} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\lambda E - A)^{-1} d\lambda = E_1.$$

وبالتالي نرى ان المؤثر $A - \mu E$ قابل للقلب في الفضاء الجزيئي X_1 . إذن لا يمكن لطيف المؤثر A في الفضاء الجزيئي X_1 ان يحتوي اكثر من نقاط المجموعة S_1 . كما ان طيف المؤثر A في X_2 لايحوى اكثر من نقاط S_2 .
لنثبت أن طيف A في X_1 يحوى كل نقاط المجموعة S_1 . ليكن $\lambda_0 \in S_1$. رأينا ان المؤثر $A - \lambda_0 E$ قابل للقلب في الفضاء الجزيئي X_2 ، ومنه يوجد مؤثر Q_2 يحقق $(A - \lambda_0 E) Q_2 y = y$ من اجل كل $y \in X_2$ ؛ لو كان المؤثر $A - \lambda_0 E$ قابلا للقلب في الفضاء الجزيئي X_1 يوجد مؤثر Q_1 يحقق $(A - \lambda_0 E) Q_1 x = x$ من اجل كل $x \in X_1$. حينئذ ننشيء مؤثرا Q يطابق Q_1 في X_1 وَ Q_2 في X_2 ويمكن تمديده خطيا على كل X. بفضل 27. 12 ـ س فإن Q يصبح حينذاك مؤثرا خطيا محدودا من الفضاء X. من الواضح أنه يصبح في نفس الوقت مقلوب $A - \lambda_0 E$. لكن هذا مستحيل لأن $\lambda_0 \in S_A$. انتهى برهان النظرية.

49. 12 . المؤثرات المتراصة. يمكن ابراز، من بين المؤثرات العاملة في فضاء نظيمي، صنف هام من المؤثرات خاصياتها هي اقرب لخاصيات المؤثرات في فضاء ذي بعد منته.

أ. **تعريف** نقول عن مؤثر خطي A يعمل في فضاء نظيمي X إنه متراص إذا حول كل مجموعة محدودة $Q \subset X$ الى مجموعة شبه متراصة (3 .39 أ)

ب. إن كل مؤثر خطي في فضاء ذي بعد منته مؤثر متراص.

جـ. يعتبر مؤثر فريدولم (12 .89) مثالا لمؤثر متراص في الفضاء $C^s(a, b)$.

د. إن المؤثر المطابق E في فضاء ذي بعد غير منته مؤثر غير متراص لأنه يحول كرة الوحدة الى الكرة نفسها اي الى مجموعة ليست شبه متراصة (12 .63 ب)

59. 12 . عمليات على المؤثرات المتراصة.

أ. إن المجموع $A_1 + A_2$ لمؤثرين متراصين A_1 وَ A_2 مؤثر متراص لرؤية

ذلك نعتبر مجموعة محدودة $Q \in X$ ومتتالية نقاط $\{x_n\}$ من Q. بما ان المؤثر A_1 متراص يمكننا استخراج من المتتالية $\{x_n\}$ متتالية جزئية $\{x'_n\}$ بحيث تكون $\{A_1x'_n\}$ متتالية كوشية، كما يمكننا استخراج متتالية جزئية $\{x''_n\}$ من x'_n بحيث تكون المتتالية $\{A_2x''_n\}$ كوشية؛ حينئذ تكون $\{(A_1 + A_2)x''_n\}$ متتالية كوشية، وهو المطلوب.

ب. إن جداء مؤثر متراص A في اي مؤثر محدود B (ترتيب الجداء ليس ذا اهمية) مؤثر متراص.

لرؤية ذلك نعتبر مجموعة محدودة $Q \in X$؛ إن BQ محدود ايضا، إذن ABQ شبه متراص؛ ومنه يأتي تراص المؤثر AB. من جهة اخرى يحول المؤثر B كل متتالية كوشية الى متتالية كوشية وبالتالي فهو يحول المجموعة شبه المتراصة AQ الى مجموعة شبه متراصة؛ إذن BA مؤثر متراص ايضاً.

ج. بصفة خاصة إذا كان المؤثر المتراص A قابلا للقلب فإن الفضاء X ذو بعد منته.

ذلك ان المؤثر $E = AA^{-1}$ متراص حسب ب ويمكننا تطبيق 12 .49– د

د. إذا كان لدينا من اجل كل... $n = 1, 2,$، مؤثر متراص A_n وكان لدينا مؤثر A بحيث $\| A - A_n \|$ فإن A مؤثر متراص.

ذلك ان من اجل $\varepsilon > 0$ معطى فإن المجموعة A_nQ (حيث Q مجموعة محدودة كيفية محتواة في كرة $|x| \leqslant r$ و$(\| A - A_n \| < \varepsilon)$ مجموعة شبه متراصة تمثل εr ـ شبكة من اجل المجموعة AQ. ينتج من ذلك ان AQ شبه متراصة (3 .59) وان المؤثر A متراص.

12 .69 . طيف مؤثر متراص.

أ. توطئة. من اجل مؤثر متراص في فضاء باناخى X فإن كل قيمة ذاتية معممة غير منعدمة قيمة ذاتية معتادة.

البرهان. لتكن λ قيمة ذاتية معممة للمؤثر المتراص A اي انه توجد

متتالية $x_1, x_2, \ldots$ ، $0 < C \leqslant |x_n|$ بحيث $(A - \lambda E) x_n = q_n \to 0$.
توجد، بفضل شبه تراص المجموعة $\{Ax_n\}$ ، متتالية اعداد طبيعية $n_1, n_2, \ldots$ بحيث تكون للاشعة Ax_{n_k} نهاية في الفضاء X ؛ نضع $z = \lim_{k\to\infty} Ax_{n_k}$. عندئذ تؤول المتتالية: $\lambda x_{n_k} = Ax_{n_k} - q_{n_k}$ ايضا الى z ؛ بصفة خاصة: $|z| = \lim |\lambda x_{n_k}| \geqslant |\lambda| C > 0$. ثم، بمراعاة كوْن $\lambda \neq 0$: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = z/\lambda$ ، $z = \lim Ax_{n_k} = (1/\lambda) Az$ ؛ نصل بالتالي الى المساواة $Az = \lambda z$ التي تثبت التوطئة.

ب. توطئة. لايقبل مؤثر متراص A خارج كل قرص $|\lambda| \geqslant c$ (حيث $c > 0$) اكثر من عدد منته من القيم الذاتية المختلفة.

البرهان. ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ قيما ذاتية مختلفة للمؤثر A تحقق $|\lambda_n| \geqslant c$. لتكن $e_1, e_2, \ldots$ الاشعة الذاتية الموافقة لها على التوالي: $Ae_n = \lambda_n e_n$ حيث $n = 1, 2, \ldots$. إن الاشعة الذاتية الموافقة لقيم ذاتية مختلفة مستقلة خطياً (12 .51 ك)؛ وبالتالي فإن المغلف الخطي L_{n-1} للأشعة $e_1, \ldots, e_{n-1}$ فضاء جزيئي ذاتي للمغلف الخطي L_n للاشعة $e_1, \ldots, e_n$. يوجد، حسب التوطئة 12 .63 ـ أ، شعاع $L_n \ni h_n$ يحقق: $|h_n| = 1$ و $|h_n - x| > 1/2$ من اجل كل $L_{n-1} \ni x$. يمكننا وضع $h_n = x_0 + \alpha e_n$ حيث $L_{n-1} \ni x_0$. لدينا عندئذ.

$$Ah_n = A(x_0 + \alpha e_n) = Ax_0 + \alpha\lambda_n e_n = Ax_0 + \lambda_n (h_n - x_0) =$$
$$= (Ax_0 - \lambda_n x_0) + \lambda_n h_n.$$

بما ان: $Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0 \in L_{n-1}$ يأتي:

$$|Ah_n - Ah_{n-1}| = |(Ax_0 - \lambda_n x_0 - Ah_{n-1}) + \lambda_n h_n| =$$
$$= |\lambda_n| \left| h_n - \frac{1}{|\lambda_n|}(Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0) \right| \geqslant |\lambda_n| \cdot \frac{1}{2},$$

وبذلك نرى انه يستحيل استخراج متتالية جزئية متقاربة من المتتالية Ah_n . وهذا يناقض تراص المؤثر A . انتهى برهان التوطئة.

ج. توطئة. لايقبل مؤثر متراص A في فضاء باناخي X خارج كل قرص

$c \leqslant |\lambda|$ (حيث $c > 0$) اكثر من عدد منته من نقاط الطيف؛ وتمثل هذه النقاط قيما ذاتية للمؤثر A .

البرهان. إن كل نقطة على حافة الطيف للمؤثر A قيمة ذاتية معممه (29.12 . ب) إذن فهي قيمة ذاتية معتادة حسب التوطئة أ؛ وبالتالي ينتج من التوطئة ب ان المؤثر المتراص A لايقبل خارج القرص $c \leqslant |\lambda|$ سوى عدد منته من النقاط على حافة الطيف. نرمز لهذه النقاط بـ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ، انها قيم ذاتية للمؤثر A حسب التوطئة . نؤكد بعد ذلك على ان هذه النقاط تنفذ كل نقاط طيف A الواقعة خارج القرص $c \leqslant |\lambda|$. لو بقيت في الطيف نقطة λ_0 ، $|\lambda_0| \geqslant c$ فإننا نستطيع تمرير مستقيم على λ_0 يذهب نحو اللانهاية ولا يمر بالقرص $c \leqslant |\lambda|$ ولا بالنقاط $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ؛ إن النقطة الاخيرة من الطيف على هذا المستقيم تنتمي عندئذ الى حافة الطيف بدون ان تتطابق مع اية نقطة من النقاط $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. يبين التناقض المحصل عليه التوطئة.

د . لما كان خارج اي قرص $c \leqslant |\lambda|$ لا يحوى، حسب التوطئة جـ، سوى عدد منته من نقاط طيف مؤثر متراص فإنه يمكن ترقيم كل نقاط الطيف حسب الترتيب التناقصي لطويلاتها. نرى بذلك ان طيف مؤثر متراص في فضاء باناخي يمثل مجوعة على الاكثر قابلة للعد من القيم الذاتية المنعزلة و 0 هو نقطة النهاية الوحيدة. ان النقطة 0 تمثل في حالة مؤثر متراص في فضاء بعده غير منته نقطة من الطيف (59.12 - حـ) (ليست بالضرورة قيمة ذاتية؛ اما النقاط الاخرى من الطيف فتشكل مجوعة قابلة للعد أو منتهية أو خالية إن كانت هذه المجموعة خالية فإن: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$ (58.12 ـ أ) والمؤثر A عديم القوة ومعمم. اما مماثل هذا المؤثر في حالة فضاء ذي بعد منته فهو مؤثر عديم القوة يحقق $A^m = 0$ مهما كان m يمكن في فضاء ذي بعد منته وصف بنية مؤثر عديم القوة وصفا كاملا (إنه معطى ضمن اساس معين بمصفوفة جوردانية عناصر قطرها معدومة كلها). فيما

يتعلق بحالة البعد غير المنتهي فإن بنية مؤثر عديم القوة ومعمم لم تدرس دراسة وافية (1).

12 .79 . التفكيك الطيفي لمؤثر متراص.

أ. لتكن $\lambda \neq 0$ نقطة من الطيف S_A لمؤثر متراص A؛ بما ان هذه النقطة منعزلة حسب 12 .69 ـ جـ يمكننا تطبيق النظرية 12 .39 . إن الفضاء X يقبل عندئذ التفكيك الى مجموع مباشر لفضاءين جزئيين مغلقين P_λ وَ Q_λ لامتغيرين بواسطة المؤثر A بحيث يتكون طيف A في P_λ من العدد λ فقط ويتكون طيفه في Q_λ من S_A عدا النقطة λ . من الواضح ان المؤثر A يبقى متراصا في كلا الفضاءين الجزئيين P_λ وَ Q_λ ؛ بما ان 0 لاينتمي لطيف A في P_λ فإن A يقبل القلب في P_λ . يعني ذلك ان الفضاء P_λ ذو بعد منته (12 .59 ـ جـ). وبالتالي فإن كل نقطة $\lambda \neq 0$ من طيف المؤثر A تعرف فضاء جزئيا لا متغير بعده منته؛ مع الاشارة الى ان بنية المؤثر A في هذا الفضاء تتعين طبعاً بالوسائل المعروفة.

ب. نستنتج من أ خاصية هامة للمؤثرات المتراصة وهي:

متناوبة فريدولم. هناك، من اجل عدد عقدي μ معطى، حالتان لا ثالثة لها: اما ان يكون للمعادلة $(E - \mu A)x = y$ حل وحيد بالنسبة لـ x مهما كان $y \in X$ ، واما ان تقبل المعادلة المتجانسة: $(E - \mu A)\, x = 0$ حلا غير منعدم.

البرهان. من الواضح ان الحالة الاولى هي المحققة عندما $\mu = 0$. ليكن إذن $\mu \neq 0$ وَ $\lambda = 1/\mu$ ؛ حينئذ تكون المعادلة $(E - \mu A)\, x = y$ مكافئة للمعادلة $(A - \lambda E)\, x = -\lambda y$. إذا لم ينتمِ λ الى طيف المؤثر A فإن $A - \lambda E$ يقبل القلب وبالتالي تتحقق الحالة الاولى في النظرية؛ اما إذا انتمى λ الى طيف A فإن λ قيمة ذاتية لـ A لأن $\lambda \neq 0$ (12.69 - جـ) ونحصل حينئذ على الحالة الثانية من النظرية.

وهكذا فإن متناوبة فريدولم تكافيء ما يلي: بخصوص المؤثر A فإن كل عدد $\lambda \ni S_A$ غير منعدم قيمة ذاتية. كنا راينا ان تلك هي خاصية المؤثرات المتراصة، لكنه يوجد صنف واسع من المؤثرات التي تتمتع بهذه الخاصية (مثلا المؤثرات التي لها قوة كيفية متراصة، راجع التمرين 13).

12 . 89 . مؤثر فريدولم التكاملي. ليكن $q(s, t)$ تابعا عقديا مستمرا لمتغيرين حقيقيين s وَ t يتغيران في نفس المجال $[a, b]$. يمثل التكامل:

$$y(t) = \int_a^b q(s, t)\, x(s)\, ds, \qquad (1)$$

من اجل كل تابع $x(t)$ مستمر على $[a, b]$ تابعا معرفا دوما على $[a, b]$ ومستمرا بفضل 18.9 . من البديهي ان الدستور (1) يعرف مؤثراً خطيا $y = Ax$ يعمل في الفضاء $C^s[a, b]$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة على $[a, b]$ المزود بالنظيم $\|x\| = \sup |x(t)|$ (93.12 ـ ب)؛ يسمى هذا المؤثر مؤثر فريدولم. ينتج من المتراجحة:

$$|y(t)| \leqslant \sup |x(s)| \int_a^b |q(s, t)|\, ds$$

ان المؤثر A محدود وان نظيمه لا يتجاوز العدد:

$$\sup_t \int_a^b |q(s, t)|\, ds$$

لنثبت ان المؤثر A متراص. نفرض ان التابع $x(t)$ يتجول في مجموعة محدودة $C^s[a, b] \ni Q$ بحيث، مثلا: $\|x\| = \sup |x(t)| \leqslant r$.

عندئذ نجد من اجل $|t' - t''| \leqslant \delta$ ان:

$$|y(t') - y(t'')| \leqslant \sup |x(t)| \int_a^b |q(s, t') - q(s, t'')|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup |x(t)|\, \omega_q(\delta)\, (b - a),$$

حيث:

$$\omega_q(\delta) = \sup_{|t'-t''| \leqslant \delta} |q(s, t') - q(s, t'')|.$$

ينتج من ذلك التقدير التالي للتذبذب $\omega_y(\delta)$ للتابع $y(t)$:

$$\omega_y(\delta) \equiv \sup_{|t'-t''| \leqslant \delta} |y(t') - y(t'')| \leqslant r\omega_q(\delta)\,(b - a)$$

ان هذا التقدير لا يتعلق باختيار التابع $x(t) \in Q$ ؛ بما ان التابع $q(s, t)$ مستمر لدينا : $\lim_{\delta \to 0} \omega_q(\delta) = 0$ ، إذن $\lim_{\delta \to 0} \omega_y(\delta) = 0$.

وهكذا فإن المجموعة $AQ \subset C^s(a, b)$ محدود بانتظام ومتساوي الاستمرار ؛ يتبين من نظرية ارزيلا (42.12ظ - ج) أن المجموعة AQ شبه متراصة من اجل كل $Q \in C^s(a, b)$ محدود ، وبالتالي فإن المؤثر A متراص ، وهو المطلوب.

نستخلص إذن صحة كل القضايا 69.12 ـ 79.12 من اجل مؤثر فريدولم بصفة خاصة نرى صحة متناوبة فريدولم (79.12 ـ ب) التي تأخذ في الحالة الراهنة الشكل التالي :

هناك من اجل عدد عقدي μ معطى حالتان لا ثالثة لها : اما ان يكون للمعادلة :

$$x(t) - \mu \int_a^b q(s, t)\, x(s)\, ds = y(t)$$

حل وحيد بالنسبة لِـ $x(t)$ من اجل كل تابع $y(t) \in C^s(a, b)$ ، واما ان تقبل المعادلة المتجانسة :

$$x(t) - \mu \int_a^b q(s, t)\, x(s)\, ds = 0$$

حلا غير منعدم

99.12 . مؤثر فولتيرا التكاملي . ليكن $q(s, t)$ تابعا مستمرا لمتغيرين s وَ t في نفس المجال $[a, b]$. يختلف التكامل :

$$z(t) = [Vx](t) = \int_a^t q(s, t)\, x(s)\, ds \qquad (1)$$

عن التكامل 89.12(1) في كون الحد الثابت b للتكامل استبدل بالحد المتغير t . إن التابع $y(t)$ معرف ، كما هو الحال في 99.12(1) ، ومستمر في $[a, b]$ (68.9 ـ أ) . يسمى المؤثر الخطي V المعطى بالدستور (1) مؤثر فولتيرا (Volterra) . إن مؤثر فولتيرا مثل مؤثر فريدولم ، مؤثر متراص ؛ نبين ذلك بنفس الطريقة مع التدقيق

شيئاً ما في المتراجحات. لكن خلافا لمؤثر فريدولم، فإن طيف مؤثر فولتيرا لا يمكن ان تكون له نقاط غير منعدمة (اي نقاط ذاتية كما رأينا). لرؤية ذلك نفرض العكس: من اجل $\lambda \neq 0$، يوجد تابع $x_0(t) \in C^s(a, b)$ بحيث:

$$V x_0(t) \equiv \int_a^t q(s, t)\, x_0(s)\, ds = \lambda x_0(t) \qquad (2)$$

بوضع $t = a$ نجد $\lambda x_0(a) = 0$ إذن $x_0(a) = 0$ بدون المس بعمومية المسألة يمكن افتراض ان التابع $x_0(s)$ لا يساوي الصفر في اي جوار للنقطة a من المجال $[a, b]$ (إن لم يكن هذا الشرط قائما في a يمكننا نقله الى اقرب نقطة من المجال $[a, b]$ يتمتع بهذا الخاصية بدون ان تتغير قيمة التكامل). وبالتالي فإن التابع $m(\delta) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant a+\delta} |x(t)|$ غير منعدم من اجل $\delta > 0$ ويؤول الى 0 من اجل $\delta \to 0$. نستطيع من اجل كل $\delta > 0$ الاشارة الى نقطة $t_\delta \in [a, a+\delta]$ بحيث $|x_0(t_\delta)| = m(\delta)$. نحصل الآن من (2) على التقدير التالي:

$$|\lambda x_0(t_\delta)| = |\lambda|\, m(\delta) \leqslant \max_{a \leqslant s \leqslant a+\delta} |x_0(s)| \cdot \int_a^{t_\delta} |q(s, t)|\, ds \leqslant c\delta m(\delta)$$

حيث

$$c = \sup_{t, s} |q(s, t)|.$$

إذا قسمنا على $m(\delta)$ يأتي:

$$|\lambda| \leqslant c\delta$$

وهذا من اجل كل $\delta > 0$. يتناقض هذه المتراجحة الفرض $\lambda \neq 0$. انتهى برهان القضية.

بتطبيق 12 .79 - ب وَ 12 .66 نرى من اجل كل $y(t)$ أنه يوجد حل وحيد لمعادلة فولتيرا:

$$[E - \mu V]\, x(t) \equiv x(t) - \mu \int_a^t q(s, t)\, x(s)\, ds = y(t)$$

ممثل بالسلسلة:

$$x(t) = (E - \mu V)^{-1} y(t) =$$
$$= y(t) + \mu V y(t) + \mu^2 V^2 y(t) + \ldots + \mu^n V^n y(t) + \ldots$$

يمكننا البرهان على ان المؤثر V^n (من اجل كل n) مؤثر لفولتيرا ايضا نواته $q_n(s, t)$ نستطيع حسابها بالتدريج حسب الدستور:

$$q_1(s, t) = q(s, t), \qquad q_n(s, t) = \int_s^t q_{n-1}(s, \sigma)\, q_1(\sigma, t)\, d\sigma$$

(راجع مثلا (15)؛ نجد في نفس الكتاب امثلة تطبيقية للمعادلات التكاملية في الفيزياء الرياضية).

تمارين

1 . نعتبر ثلاثة فضاءات توابع على المستقيم:

أ) الفضاء المؤلف من كل التوابع المستمرة والمحدودة

ب) الفضاء المؤلف من التوابع المستمرة التي تتمتع بالخاصية التالية:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

ج) الفضاء المؤلف من التوابع المستمرة التي تنعدم كل واحد منها خارج مجال نزود هذه الفضاءات بالمسافة:

$$\rho(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

هل هذه الفضاءات تامة؟

2 . عيّن في الفضاء $R^s(0, \infty)$ (المؤلف من التوابع المستمرة والمحدودة على نصف المستقيم $\infty > x > 0$ المزود بالنظيم $\|x(t)\| = \sup_t |x(t)|$) مجموعة لها قوة المستمر للتوابع $x_\alpha(t)$ التي تحقق $\|x_\alpha(t)\| = 1$ ، $\|x_\alpha(t) - x_\beta(t)\| \geqslant 1$ من اجل $\alpha \neq \beta$.

ملاحظة: ينتج من ذلك انه لاتوجد في الفضاء $R^s(0, \infty)$ اية مجموعة قابلة للعد كثيفة اينما كان.

3 . اثبت ان التابعية:

$$F(y) = \int_0^{1/2} y(x)\, dx - \int_{1/2}^{1} y(x)\, dx$$

مستمرة في الفضاء $R^s(0, 1)$ ؛ اثبت ان الحد الاعلى لقيم $F(y)$ على كرة

الوحدة المغلقة في الفضاء $R^s(0, 1)$ يساوي 1 ، مع الملاحظة ان هذا الحد لا يدرك عند اي عنصر من كرة الوحدة.

4 . نعلم ان توطئة متوازي الاضلاع (34.12 أ) قائمة من اجل كل شعاعين x وَ y من فضاء نظيمي X . اثبت ان النظيم في X مُولد عن الجداء السلمي:

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

5 . ليكن p جبر كل كثيرات الحدود $p(z)$ ذات المعاملات العقدية في القرص $Q=\{z:|z|\leqslant 1\}$ ، المزود بالنظيم $\|p(z)\|=\max|p(z)|$. يحوى هذا الجبر 1 ويفصل كل نقطتين من المتراص Q لكن نظرية ستون 25.12 ـ ج لا تقوم فيه، والجبر P ليس كثيفا في الجبر $C^s(Q)$ المؤلف من كل التوابع العقدية المستمرة في القرص Q .

6 . إن المجموعة $I(F)$ من جبر نظيمي $R^s(Q)$ (Q فضاء متري) المؤلفة من التوابع $R^s(Q)\ni f(x)$ التي تساوي التابع المنعدم على مجموعة مغلقة $Q\supset F$ مثالي مغلق في $R^s(Q)$. اثبت أنه اذا كان Q متراصا فإن كل مثالي مغلق $R^s(Q)\supset I$ مطابق للمثالي $I(F)$ من اجل مجموعة $Q\supset F$.

7 . نفرض ان جماعة متساوية الاستمرار $P^s(Q)\supset E$ مؤلفة من توابع (P فضاء متري وَ Q متراص) تحقق: من اجل كل $Q\ni t$ ، تنتمي قيم التوابع $E\ni x(t)$ الى شبه متراص $P\supset P_t$. اثبت وجود شبه متراص $P\supset P_0$ يحوي قيم كل التوابع $E\ni x(t)$ عند كل النقاط $Q\ni t$.

8 . لتكن $T=\|t_{km}\|$ مصفوفة تحقق فرض نظرية توبيتر 67.12 ـ ج شيد بالعددين 1 وَ 1− متتالية ξ_n ليست لها T ـ نهاية.

9 . اثبت ان الشرط $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=1$ ضروري وكاف لكي يكون المجال:

$[\underline{\lim}\, T_n(x), \overline{\lim}\, T_n(x)]$ (67.12) محتويا في المجال $[\underline{\lim}\, x, \overline{\lim}\, x]$

مهما كانت المتتالية المحدودة $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$.

10 . ليكن $C = C^s(Q)$ جبر كل التوابع العقدية $f(z)$ المستمرة على الدائرة $|z| = 1$ (المزود بالنظيم المعتاد) وليكن Z جبر التوابع $\varphi(z)$ التحليلية في القرص $|z| < 1$ والمستمرة في القرص $|z| \leqslant 1$ المزود بنفس النظيم $\|\varphi\| = \sup|\varphi(z)|$. اثبت ان:

أ) التطبيق الذي يصل كل تابع $Z \ni \varphi(z)$ بالتابع النهاية $C \ni \varphi(e^{it})$ تماثل متباين من Z في C ؛ وبالتالي يمكن القول ان الجبر Z جبر جزيئي من الجبر C .

ب) Z جبر جزيئي مغلق في C .

ج) طيف المؤثر A ، وهو مؤثر الضرب في z في الفضاء C ، هو الدائرة $|z| = 1$ ؛ اما طيف نفس المؤثر في الفضاء Z فهو القرص $|z| \leqslant 1$ ؛ زيادة على ذلك فإن القيم $|z| = 1$ هي وحدها القيم الذاتية المعممة للمؤثر A في Z .

د) العنصر z قابل للقلب في الجبر C ، وغير قابل للقلب الجبر Z ، وليس قاسما معمما للصفر في Z .

11 . لتكن Q مجموعة متراصة في المستوى الذي تنتمي اليه العناصر z وليكن: $C = C^s(Q)$ فضاء كل التوابع العقدية المستمرة على المجموعة Q . اثبت ان مؤثر الضرب في z طيفه هو المجموعة Q .

12 . نحن نعلم، من اجل مؤثر A في فضاء باناخي X وكثير حدود $p(\lambda)$ ، ان المؤثر $p(A)$ متراص. برهن على ان كل نقاط طيف المؤثر A (باستثناء ممكن لجذور كثير الحدود $p(\lambda)$) قيم ذاتية.

13 . اثبت ان متناوبة فريدولم قائمة من اجل مؤثر A له قوة (كيفية) متراصة

14 . ليكن $p \geqslant 1$ ، $q \geqslant 1$ ، $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. اثبت من اجل تابعين كيفيين $x(t)$ و $y(t)$ مستمرين بتقطيع على مجال $a \leqslant t \leqslant b$ ، متراجحة هولدر (Hölder):

$$\left|\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p\,dt}\;\sqrt[q]{\int_a^b |y(t)|^q\,dt}.$$

15 . اثبت، باعتبار تابعي التمرين 14 ، المتراجحة:

$$\sqrt[p]{\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p\,dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |y(t)|^p\,dt}$$

وهذا من اجل $p \geqslant 1$.

16 . ليكن $p \geqslant 1$ وَ $q \geqslant 1$ وَ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. اثبت، من اجل شعاعين كيفيين $x=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ وَ $y=\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ ، متراجحة هولدر :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p}\cdot\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q}$$

17 . اثبت، باعتبار نفس الشعاعين $x=\{\xi_k\}$ و $y=\{\eta_k\}$ ، متراجحة المثلث :

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k+\eta_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p}$$

وهذا من اجل $p \geqslant 1$.

18 . برهن على ان الفضاء النظيمي l_p (33.12 ـ د) تام مهما كان $p \geqslant 1$.

19 . لدينا متتالية توابع $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ معرفة وقابلة للإشتقاق لانهائيا على مجال $a \leqslant t \leqslant b$. نفرض وجود متتالية ثوابت A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ تحقق :

$$|x_n^{(k)}(t)| \leqslant A_k \quad (n=1, 2, \ldots; \quad k=0, 1, 2, \ldots).$$

استخرج متتالية جزئية $x_{n_m}(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ متقاربة بانتظام على المجال $a \leqslant t \leqslant b$ لما $m \to \infty$ وكذا كل متتالية مشتقات $x_{n_m}^{(k)}(t)$ مهما كانت رتبة الاشتقاق k .

20 . اثبت ان الكمية $\|x\|_p$ (33.12 ـ ج) لا تحقق مسلمة المثلث 13.12 ـ ج إن كان $p < 1$.

21 . هناك صيغة اخرى لنظرية ارزيلا 42.12 لا تتطلب استمرار التوابع $x(t)$ ولا تراص (ولا حتى القابلية لمسافة) مجموعة تعريفها Q . وهذه الصيغة هي: لتكن $P(Q)$ جماعة توابع محدودة $x(t)$ معرفة على مجموعة كيفية Q ، قيمها في فضاء متري P ، ندخل مسافة على هذه الجماعة بواسطة الدستور: $\rho(x, y) = \sup \rho(x(t), y(t))$. تكون مجموعة $P(Q) \supset E$ شبه متراصة إذا وفقط إذا تمكنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، من أيجاد تجزئة للمجموعة Q الى عدد منته من المجموعات الجزئية $Q_1, \ldots, Q_n$ بحيث لا يتجاوز تغيّر كل تابع من E على اية مجموعة من المجموعات $Q_1, \ldots, Q_n$ العدد ε .

نبذة تاريخية

برزت البنيات الاساسية للتحليل في اواخر القرن 19 وبداية القرن 20 ، وحدث ذلك عندما تجمّع في التحليل عدد هائل من النتائج والمعلومات حتى اصبح تنظيمها امرا لازما وعاجلا سبق ظهور الارتباط الخطي للأشعة والبعد (المساوي لأي عدد n طبيعي) عند غراسمان Grassmann (1846) لكن الفضاءات الشعاعية المجردة ظهرت لاول مرة عند بيانو Peano (1888)

تطورت نظرية فضاءات التوابع المستمرة في ايطاليا خلال السبعينات من القرن 19 (فولتيرا ، اسكولى ، ارزيلا ، دينى). برهن على النظرية المتعلقة بشروط تراص مجموعة توابع مستمرة، التي تسمى عادة نظرية ارزيلا ، اسكولى لأول مرة سنة 1883 . اما نظرية فيرشتراس حول تقريب (أو مقاربة) التوابع المستمرة بواسطة كثيرات الحدود فتعود لسنوات 1870 ؛ قام بتعميمها 12 .25 ـ 12 .35) ستون عام 1936 .

اهتمت المرحلة الموالية بادخال الفضاءات الهيلبرتية استفتحت هذه المرحلة بانشاء نظرية خاصة بالمعادلات الخطية التكاملية من طرف فولتيرا (1887) وفريدولم (1900) اكتشف هيلبرت سنة 1906 تشابها متميزا بين المسألة الخاصة بالقيم الذاتية للمؤثرات التكاملية ومسألة تبسيط شكل تربيعي، هذا وتبين ان حل المسألة المتعلقة بالمؤثرات التكاملية مرتبط بتراص هذه المؤثرات. قدم ا. شميث E. Schmidt عام 1907 عرضا جديدا لنظرية هيلبرت وذلك بكتابة المؤثرات التكاملية بواسطة مصفوفات غير منتهية تعمل في «الفضاء الهيلبرتي» للمتتاليات ذات المربع القابل للجمع. انشأ ستون وفون نومان Von Neumann حوالي 1930 نظرية مسلمية للفضاءات الهيلبرتية تعتمد على مفهوم الجداء السلمي.

قام ف. ريسي F. Riesy سنة 1918 بانشاء آخر لنظرية المؤثرات المتراصة التي تصلح في الواقع، من اجل كل فضاء نظيمي تام (شكلياً،

بالنسبة لفضاء التوابع المستمرة). ظهر التعريف المجرد للفضاءات الشعاعية النظيمية بعد ذلك بقليل، 1920 الى 1922 ، في اعمال باناخ، هان Hahn ، فيــنر Wiener. اكتشفت مدرسة باناخ خلال العشرينات المباديء الاساسية للتحليل التابعي الخطي بما في ذلك النظرية حول التطبيق المفتوح ونظــرية الحد المنتظم (47.12). نجد النتائج التي توصلت لها هذه المدرسة وكذا عددا كبيرا من التطبيقات في [20]. رغم ذلك كله فإن المسألة الرئيسية للتمثيل القانوني لمؤثر خطي كيفي، المماثل للتمثيل الجورداني لمؤثر خطي ذي بعد منته، لازالت تنتظر حلها. بهذا الصدد هناك عدد كبير من النتائج الهامة والقوية تتعلق بالمؤثرات في فضاء هيلبرتي. حصل هيلبرت منذ 1906 ـ 1911 على نتيجة مماثلة للتمثيل القطري للمؤثرات التناظرية (والهيرميتيــة) متراصــة او غير متراصــة امــا الانتقــال الى المؤثــرات غير التناظرية فقد تم ببطء شديد؛ ترجع النتائج الاولى التي تعد ذات قيمة (والمرتبطة اساسا بالاسمين ليفشيتز Livchitz وَكلديش keldych) الى اواخر الاربعينات. للإطلاع على الحالة الراهنة لهذه النظرية انظر الدراستين [4] وَ [5].

اما نظرية الجبور التنظيمية التي لم نقدم سوى مبادئها الاولى فقد انشئت من طرف غلفاند خلال 1937 ـ 1939؛ قدم [3] وَ [8] عرضا لما تتخلله امثلة متنوعة خاصة بتطبيقاتها في التحليل.

إن أول من قام بمحاولة علمية لجمع متتاليات متباعدة هو أولر («اسس الحساب التفاضلي» سنة 1755). إن الامر لا يتعلق بطبيعة الحال، في ذلك العهد، بنظرية متينة وسليمة؛ بالإضافة الى ذلك فإن الاستعمال غير السليم للسلاسل المتباعدة قد هدم اعتبارها. كان من شأن اصلاح كوشي (1821) انه ابعد، لمدة طويلة، المتتاليات والسلاسل المتباعدة من التحليل. تكونت النظرية الحديثة لجمع المتتاليات في اواخر القرن 19 وبداية القرن 20 (سيــزادو 1880 ، فــورونــوي 19.2 ، تــوبليتــز 1911). يمكــن للقاريء التعرف على حالتها الراهنة من خلال (21).

الفصل 13

المعادلات التفاضلية

إذا قدّر لعقل في لحظة ما ان يتعرف على كل القوى المتواجدة في الطبيعة وعلى مواقع الكائنات فيها، وان كان اتساع هذا العقل قادرا على تحليل هذه المعطيات، فإنه سيتمكن من وضع، في قانون واحد، حركات اكبر الاجسام في الكون وحركات اخف الذرات وزنا؛ سوف لن يكون لهذا العقل ادنى شك فالمستقبل كالماضي، سيكونان مرتسمين امامة. يمثل الفكر البشري في كمال ما قدمه في علم الفلك، صورة مبسطة لذلك العقل.

بيير - سيمون لابلاس «بحث فلسفي حول الاحتمالات (1795)»

Pierre-Simon Laplace

§ 13 .1 . تعاريف وامثلة.

13 .11 . أ. إذا ضمت معادلة بالنسبة لتابع مجهول $u = u(t)$ ، $a \leqslant t \leqslant b$ مشتقا (من الرتبة الاولى او رتبة عالية) لهذا التابع، فإنها تسمى **معادلة تفاضلية**. يمكن ان نبعث عن التابع $u(t)$ حسب شروط المسألة المعتبرة، اما من بين التوابع العددية واما من بين التوابع الشعاعية التي تنتمي قيمها الى فضاء بعده n ، واما من بين التوابع الشعاعية التي تنتمي قيمها الى فضاء شعاعي نظيمي.

يسمى كل تابع $u(t)$ يحقق معادلة تفاضلية معطاة حلا أو حلا خاصاً لهذه المعادلة. تسمى مجموعة كل الحلول الحل العام لهذه المعادلة.

ب. وهكذا فإن ابسط المعادلات تفاضلية وهي:

$$u'(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

حلها العام هو $u(t)$ = ثابتا ؛ والثابت هذا ثابت عددي إن كان قيم $u(t)$ عددية (54.7 ـ ج)، وثابت شعاعي إن كانت قيمة شعاعية، وعنصر ثابت من فضاء نظيمي B إن اخذ $u(t)$ قيمة في الفضاء B (16.12 ـ ق). يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$u'(t) = g(t) \tag{2}$$

حيث $g(t)$ تابع معطى (عددي أو شعاعي) على شكل تكاملي:

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau + \text{const}$$

(حيث C ثابت) شريطة ان يكون $g(t)$ مستمرا بتقطع (23.9 و 12 . 36 ـ ج) يبين المثالان (1) وَ (2) ان المعادلات التفاضلية لا تعين حلولها بطريقة وحيدة بحيث انه يجب لتعيين حل تعيينا كاملا، فرض شروط اضافية. جرت العادة ان فرض كشرط اضافي بان قيمة التابع المجهول $u(t)$ معلومة عند نقطة $[a, b] \ni t_0 = t$. عند معرفة $u(t_0)$ فإن حل المعادلة (1) أو (2) يتعين بطريقة وحيدة.

جـ. تكتب معادلة اعم من المعادلتين السابقتين على الشكل:

$$u'(t) = \Phi(t, u(t)) \tag{3}$$

حيث $\Phi(t, z)$ تابع قيمة في الفضاء النظيمي B الذي تنتمي اليه قيم التابع $u(t)$. نتساءل هنا عن وجود حل $u(t)$ وعن وحدانيته عندما يكون $u(t_0)$ معطى.

د. من المفيد ان نعطي لِـ (3) معنى «حركي» في الفضاء B . نفرض ان هناك نقطة متحركة في الفضاء B موقعها في كل لحظة هو: $u = u(t)$.

عندما يتغير t فإن النقطة المتحركة ترسم في B منحنيا $u = u(t)$ ($a \leqslant t \leqslant b$). يمثل التابع الشعاعي $u(t)$ قانون حركة النقطة المتحركة على طول هذا المنحنى. عندئذ يمكن فهم الشعاع $u'(t)$ على انه شعاع سرعة النقطة المعتبرة (وهو نهاية نسبة المسافة المقطوعة Δu على الزمن Δt الذي قطعت خلاله هذه المسافة) يصل الطرف الايمن من المعادلة (3) بشعاع $B \ni z$ من اجل كل $[a, b] \ni t$ مثبت بالشعاع $\Phi(t, z)$. يفهم الحل $u(t)$ على انه قانون حركة نقطة متحركة في الفضاء B عندما تكون سرعة الحركة في كل لحظة t ومن اجل كل موقع $B \ni u$ ، مطابقة للشعاع $\Phi(t, u)$. وهكذا فإن التابع $\Phi(t, u)$ يعرف في كل لحظة t حقل اشعة يعين كل واحد منها سرعة حركة النقطة المتحركة عند النقطة u من الفضاء B الموافقة لِـ t . تمثل حلول المعادلة (3) المسارات الممكنة للنقطة المتحركة، وتسمى في هذه الحالة المنحنيات التكاملية للمعادلة.

يمكننا في الفضاء $R_1 \times B$ تقديم معنى سي محض للمعادلة [3]. يوافق كل تابع $u = u(t)$ منحنيا في الفضاء $R_1 \times B$ ($t \in R_1$ ، $u \in B$).
إن التفاضلية $u'(t)\,dt$ هو الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $u(t)$ عندما يتغير المتغير المستقل من t الى $t+dt$. وبالتالي فإن المشتق $u'(t)$ في الحالة الحقيقية $(B = R_1)$ يفهم على انه المعامل الزاوي للمماس اي ميل المنحنى $u(t)$ عندما ننتقل من t الى $t + dt$ ، الى لامتناهيات في الصغر من رتب اعلى. في الحالة العامة ومن اجل B كيفي، فإن للمشتق معنـــى مماثلا : إن المستقيم $u - u_0 = u'(t_0)(t - t_0)$ مماس للمنحنـــى $u = u(t)$ من اجل $t = t_0$ ويمكن تسمية المقدار $u'(t_0)$ معاملا زاويا. يعين التابع $\Phi(t, z)$ عند كل نقطة (t_0, z_0) من الفضاء $R_1 \times B$ مستقيما :

$$u - z_0 = \Phi(t_0, z_0)(t - t_0) \qquad (4)$$

وتتطلب المعادلة (3)، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، ان يكون للمنحنـــى $u = u(t)$ مماس مطـــابـــق للمستقيم (4) عنـــد النقطـــة $[t_0, u(t_0)]$.

د . نعتبر كمثال في الفضاء $B = R_2$ المعادلة:

$$u'(t) = v(u)$$

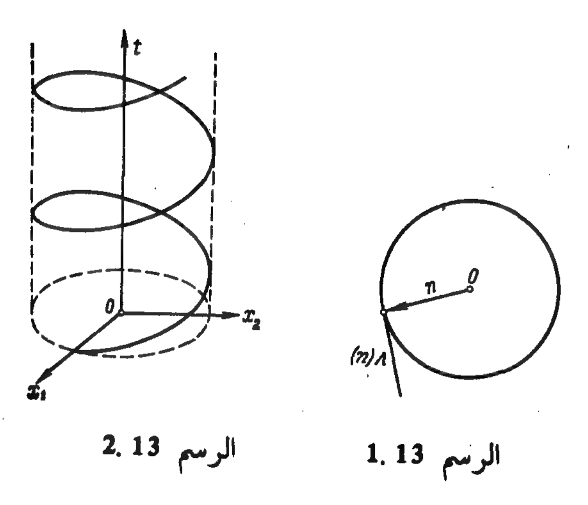
حيث يرمز $v(u)$ ، من اجل كل $u \in R_2$ ، للشعاع الذي نحصل عليه بادارة الشعاع u مقدار زاوية قائمة في الاتجاه الموجب.

من وجهة النظر الحركية، ينبغي على النقطة المتحركة ان تتحرك في المستوى R_2 بحيث يطابق شعاع سرعتها الشعاع $v(u)$ عند كل نقطة u . من الواضح ان كل حل يمثل حركة على طول دائرة متمركزة في مصدر الاحداثيات بسرعة تساوي عدديا نصف قطر هذه الدائرة (الرسم 13 .1).

من وجهة النظر الهندسية نبحث عن المنحنيات في الفضاء الثلاثي البعد: $R_1 \times R_2$ التي يعطي مماسا عند كل نقطة بالمعادلة:

$$u - z_0 = v(z_0)(t - t_0)$$

إن شكل المنحنيات المطلوبة شكل حلزوني حول المحور الذي تنتمي اليه (الرسم 13 .2).



الرسم 13 .2   الرسم 13 .1

س. سنرى ادناه ان جملة معادلات من الشكل:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t)=\Phi_1(t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(t)=\Phi_n(t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t)) \end{array}\right. \tag{5}$$

والمعادلة من الرتبة n ذات الشكل:

$$u^{(n)}=\Phi(t,\ u(t),\ u'(t),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(t)) \tag{6}$$

ترد أي الى معادلة من النمط (3).

ص. ستكون مسائل وجود حلول المعادلات التفاضلية ووحدانيتها ضمن شروط اضافية، محل انشغالنا طيلة الفصل؛ نكتفي الآن باعتبار بعض الحالات البسيطة جداً والتي نحصل فيها على الحل بشكل صريح.

13 .21 . لتكن معادلة من الشكل:

$$u'(t)=A(t)\,u(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{1}$$

تسمى مثل هذه المعادلة معادلة خطية متجانسة. نفرض في البداية ان التابع المطلوب $u(t)$ تابع عددي وان المعامل $A(t)$ تابع عددي مستمر معطى. نفرض ايضا القيمة $u_0=u(t_0)$ معلومة ايضا. إن التابع $u(t)\equiv 0$ حل بديهي للمعادلة (1) لكنه لا يحقق الشرط الابتدائي، إن كان $u_0\neq 0$. لنبحث عن حلول اخرى. ان كان $u(t)$ حلا غير مطابق للصفر فإنه يوجد مجال تتحقق فيه: $u(t)\neq 0$، مثلا: $u(t)>0$. نحصل عندما نقسم (1) على $u(t)$، على:

$$\frac{u'(t)}{u(t)}\equiv[\ln u(t)]'=A(t)$$

ومنه:

$$\ln u(t)=\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+C$$

بوضع $t=t_0$ نحصل على $C=\ln u_0$ ؛ في الختام يأتي بعد التخلص من اللوغاريتمات:

$$u(t)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau}\,u_0 \tag{2}$$

يمكن التأكد مباشرة ان (2) يمثل بالفعل حلا للمعادلة (1) لا يتعلق الآن باشارة $u(t)$. نلاحظ ان الحل (2) معرف من اجل كل $t \ni [a, b]$ (ولا ينعدم في اية نقطة إن كان $u_0 \neq 0$). إذن فإن المعادلة (1) تقبل الحل (2) الذي يحقق الشرط الابتدائي $u(t_0) = u_0$.
اذا كان $A \equiv A(t)$ ثابتا فإن الحل (2) يأخذ شكلا بسيطا جداً هو :

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 \qquad (3)$$

31. 13 . نعود الى المعادلة:

$$u'(t) = \mathrm{A}(t)\, u(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad (1)$$

ونفرض هذه المرة ان $u(t)$ تابع شعاعي قيمة في فضاء باناخي B ؛ كما نفرض ان المعامل $\mathrm{A}(t)$ مؤثر خطي مستمر يطبق، من اجل كل $t \ni [a, b]$، الفضاء B في نفسه وأنه يتعلق باستمرار بالوسيط t . إن استدلال 13 .21 غير صالح هنا لأن القسمة على $u(t)$ تفقد معناها. ورغم ذلك يتبين اننا نستطيع اعطاء معنى سليم الى النتيجتين 13 . 21 (2) و (3).

نفرض في البداية ان المؤثر $\mathrm{A}(t) \equiv \mathrm{A}$ لا يتعلق بـ t ، سندرس الحالة العامة في 13 . 91.

نعتبر $e^{(t-t_0)\mathrm{A}}$ كتابع للمؤثر A بمفهوم 12 .68 - ج:

$$e^{(t-t_0)\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n \mathrm{A}^n}{n!} \qquad (2)$$

إن هذا التابع معرف من اجل كل t حقيقي ويأخذ قيمة في الفضاء $\mathrm{L}(\mathrm{B})$ المؤلف من المؤثرات الخطية المحدودة في B . يمكن اشتقاق السلسلة (2) حداً حداً بالنسبة لِـ t (12 .66)، يعطينا ذلك:

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(t-t_0)^{n-1}\mathrm{A}^n}{n!} = \mathrm{A}e^{(t-t_0)\mathrm{A}}$$

نستخلص عندئذ ان: $u(t) = e^{(t-t_0)\mathrm{A}} u(t_0)$ حل بالفعل للمعادلة (1). من اجل: $t = t_0$ يعطي هذا الحل الشعاع $u = u(t_0)$. وهكذا،

من اجل $u(t_0)$ معلوم، لدينا حل للمعادلة المتجانسة (1) يكتب على الشكل:

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u(t_0) \qquad (3)$$

للبرهان على وحدانية الحل المحصل عليه، نثبت التوطئة التالية:

توطئة. إذا كان $B(t)$ تابعا مؤثريا قابلا للإشتقاق بقوة (اي اذا تحققت العلاقة: $B'(t)\, x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} x$) من اجل كل $x \in X$) وكان $x(t)$ تابعاً شعاعياً قابلا للإشتقاق فإن التابع الشعاعي: $y(t) = B(t)\, x(t)$ يقبل ايضا الاشتقاق ولدينا:

$$y'(t) = B(t)\, x'(t) + B'(t)\, x(t)$$

البرهان. لدينا:

$$\frac{B(t+\Delta t)\, x(t+\Delta t) - B(t)\, x(t)}{\Delta t} =$$

$$= B(t+\Delta t) \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} x(t)$$

إن الحد الاول في الطرف الايمن يؤول الى $B(t)\, x'(t)$ عندما $\Delta t \to 0$ (47.12 . ر ـ س) اما الحد الثاني فيؤول الى $B'(t)\, x(t)$ ومنه تأتي التوطئة.

نبرهن الآن ان (3) حل وحيد للمعادلة (1) عندما تكون القيمة $u(t_0)$ معلومة. ليكن $u(t)$ حلا كيفيا للمعادلة (1) حيث (1) القيمة $u(t_0)$ معلومة. ندخل تابعا جديدا مجهولا $v(t)$ بواسطة العلاقـــة $u(t) = e^{(t-t_0)A} v(t)$ ، أو وهـــو الامـــر نفســـه، $v(t) = e^{-(t-t_0)A} u(t)$. بنقـــل $u(t)$ في المعـــادلـــة (1) وباستخدام التوطئة نحصل على:

$$u'(t) = Ae^{(t-t_0)A} v(t) + e^{(t-t_0)A} v'(t) = Ae^{(t-t_0)A} v(t)$$

ومنه:

$$e^{(t-t_0)A} v'(t) = 0$$

بالضرب في $e^{-(t-t_0)A}$ نحصل على $v'(t) = 0$. ينتج من ذلك:

$$v(t) \equiv v(t_0) = u(t_0)$$

وبالتالي فإن الحل $u(t)$ يكتب على الشكل (3)، وهو المطلوب.

41.13 . كيف سيكون الحل 31.13 في حالة فضاء حقيقي بعده n ؟
للإختصار، نضع $t_0 = 0$. نختار في الفضاء R_n اساساً $e_1, \ldots, e_n$.
ننشر التابع الشعاعي $u(t)$ وفق هذا الاساس، ليكن:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) e_k$$

فإن:

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{n} u'_k(t) e_k$$

والمعادلة الشعاعية 21.13 (1) تكتب على شكل جملة معادلات سلمية:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du_1(t)}{dt} = a_{11}u_1(t) + \ldots + a_{1n}u_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du_n(t)}{dt} = a_{n1}u_1(t) + \ldots + a_{nn}u_n(t) \end{array} \right. \quad (1)$$

بواسطة مصفوفة حقيقية ثابتة $A = \| a_{jk} \|$. الحل هو نتيجة تطبيق المؤثر e^{tA} على الشعاع الابتدائي $u_0 = u(0)$.

يتبين ان الحل المطلوب يمكن كتابته على شكل صريح وبسيط في حالة اختيارنا للاشعة الابتدائية u_0 اشعة اساس جورداني للمصفوفة A (71.12 ـ س). ندخل فيما يتعلق بمثل هذه الاشعة الرموز التالية:

أ) نرمز لشعاع الاساس الموصول بخانة جوردانيه مؤلفة من عنصر واحد λ_j ، بـ f_j .

ب. نرمز لاشعة الاساس الموصولة بخانة جوردنية $m \times m$:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{array} \right\| \quad (2)$$

(λ_j حقيقي) بـ $f_j^1, \ldots, f_j^m$. ونرمز لشعاعي الاساس الموصولين بخانة (2×2):

$$\left\| \begin{array}{cc} \sigma_j & -\tau_j \\ \tau_j & \sigma_j \end{array} \right\|, \quad \lambda_j = \sigma_j + i\tau_j \quad (3)$$

بـ. h_j ، g_j ، اخيرا نرمز لأشعة الاساس الموصولة بخانة

$$\left\|\begin{matrix} \sigma_j & -\tau_j & 1 & 0 & \dots \\ \tau_j & \sigma_j & 0 & 1 & \dots \\ & & \sigma_j & -\tau_j & \dots \\ & & \tau_j & \sigma_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\| \qquad (4)$$

بـ $h_j^1, g_j^1, \dots, h_j^m, g_j^m$. نذكر ان الاعداد λ_j تمثل في كل الحالات المعتبرة جذور المعادلة المميزة.

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{matrix}\right\| = 0$$

حيث σ_j وَ τ_j اعداد تمثل على التوالي الاجزاء الحقيقية والاجزاء الخيالية للجذور العقدية لهذه المعادلة (12 . 71 ـ س).

إن كل خانة من المصفوفة الجوردانية تعرف فضاء جزئيا لا متغير للمؤثر (بعده 1 ، m ، 2 ، $2m$ على التوالي). إذا طبقنا المؤثر e^{tA} على شعاع من هذا الفضاء الجزئي يعطينا شعاعا آخرا من نفس الفضاء الجزئي. نرمز للحلول التي توافق الاشعة الابتدائية $f_j, f_j^s, h_j, g_j, h_j^s, g_j^s$ ($s = 1, \dots, m$) على التوالي بـ

$$f_j(t),\ f_j^s(t),\ h_j(t),\ g_j(t),\ h_j^s(t),\ g_j^s(t)$$

يرد المؤثر A في الفضاء اللامتغير الوحيد البعد المولد من الشعاع f_j ، الى الضرب في λ_j ويرد المؤثر e^{tA} الى الضرب في $e^{t\lambda_j}$. نستنتج من ذلك:

$$f_j(t) = e^{t\lambda_j} f_j \qquad (5)$$

فيما يخص بالفضاء اللامتغير ذي m بعدا الموافق للخانة الجوردانية (2) لدينا (12 .91 ـ ر):

$$e^{tA} = \left\|\begin{matrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_j t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_j t} \end{matrix}\right\|$$

وبالتالي :

$$(6)\quad \begin{cases} f_j^1(t)=e^{tA}f_j^1=e^{\lambda_j t}f_j^1, \\ f_j^2(t)=e^{tA}f_j^2=e^{\lambda_j t}(tf_j^1+f_j^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_j^m(t)=e^{tA}f_j^m=e^{\lambda_j t}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}f_j^1+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}f_j^2+\dots+f_j^m\right). \end{cases}$$

ج. لدينا بخصوص الخانة الجوردانية (2×2) الواردة في (3):

$$e^{tA}=e^{\sigma t}\begin{Vmatrix} \cos t\tau & -\sin t\tau \\ \sin t\tau & \cos t\tau \end{Vmatrix}$$

وهذا حسب (12 .91 ـ ط). وبالتالي:

$$(7)\quad \begin{cases} h_j(t)=e^{\sigma t}[\cos t\tau\cdot h_j+\sin t\tau\cdot g_j], \\ g_j(t)=e^{\sigma t}[-\sin t\tau\cdot h_j+\cos t\tau\cdot g_j] \end{cases}$$

د. لدينا (12 .91 ـ ط) بخصوص الخانة الجوردانية (4):

$$e^{tA}=e^{\sigma t}\begin{Vmatrix} \cos t\tau & -\sin t\tau & t\cos t\tau & -t\sin t\tau & \dots & & \\ \sin t\tau & \cos t\tau & t\sin t\tau & t\cos t\tau & \dots & & \\ & & \cos t\tau & -\sin t\tau & \dots & & \\ & & \sin t\tau & \cos t\tau & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & \dots & \cos t\tau & -\sin t\tau \\ & & & & \dots & \sin t\tau & \cos t\tau \end{Vmatrix}$$

بحيث أن:

$$(8)\quad \begin{cases} h_j^1(t)=e^{\sigma t}[\cos \tau t\cdot h_j^1+\sin \tau t\cdot g_j^1], \\ g_j^1(t)=e^{\sigma t}[-\sin \tau t\cdot h_j^1+\cos \tau t\cdot g_j^1], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h_j^m(t)=e^{\sigma t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\cos \tau t\cdot h_j^1+\sin \tau t\cdot g_j^1)+\dots \right. \\ \qquad \left. \dots+\cos \tau t\cdot h_j^m+\sin \tau t\cdot g_j^m\right], \\ g_j^m(t)=e^{\sigma t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(-\sin \tau t\cdot h_j^1+\cos \tau t\cdot g_j^1)+\dots \right. \\ \qquad \left. \dots+(-\sin \tau t\cdot h_j^m+\cos \tau t\cdot g_j^m)\right]. \end{cases}$$

51. 13 . كنا انشانا n حلا خاصة ومختلفة للمعادلة 21. 13(1) في الفضاء R_n وهي توافق n شعاعا من اساس جورداني للمصفوفة A باعتبارها اشعة ابتدائية. ان كل حل من هذه الحلول، البالغ عددها n ، يمثل ضمن اساس

الانطلاق $e_1, \ldots, e_n$ الذي تأخذ المعادلة 21.13 (1) بالنسبة اليه شكل الجملة 41.13 (1)، بواسطة n تابعا سلمياً (احداثيات). ليكن مثلا:

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(t)\, e_k, \quad h_j(t) = \sum_{k=1}^{n} v_{jk}(t)\, e_k, \quad g_j(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{jk}(t)\, e_k$$

$$f_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{jk}^s(t)\, e_k, \quad h_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} v_{jk}^s(t)\, e_k, \quad g_j^s(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{jk}^s(t)\, e_k$$

ثم:

$$f_j = \sum u_{jk} e_k, \quad h_j = \sum v_{jk} e_k, \quad g_j = \sum w_{jk} e_k$$

$$f_j^s = \sum u_{jk}^s e_k, \quad h_j^s = \sum v_{jk}^s e_k, \quad g_j^s = \sum w_{jk}^s e_k$$

لدينا:

$$f_j(t) = e^{\lambda_j t} f_j = e^{\lambda_j t} \sum u_{jk} e_k = \sum u_{jk}(t)\, e_k$$

ومنه:

$$u_{jk}(t) = e^{\lambda_j t} u_{jk} \tag{1}$$

نحصل بطريقة مماثلة على:

$$u_{jk}^s(t) = e^{\lambda_j t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!} u_{jk}^1 + \ldots + u_{jk}^s\right], \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{jk}(t) &= e^{\sigma_j t}[\cos \tau_j t \cdot v_{jk} + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}], \\ w_{jk}(t) &= e^{\sigma_j t}[-\sin \tau_j t \cdot v_{jk} + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}], \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{jk}^s(t) &= e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + (\cos \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \sin \tau_j t \cdot w_{jk}^s)\right], \\ w_{jk}^s(t) &= e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^1 + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^1) + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + (-\sin \tau_j t \cdot v_{jk}^s + \cos \tau_j t \cdot w_{jk}^s)\right]. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

61.13 . يمكن استخدام الدساتير 41.31 (5)-(8) في دراسة المنحنيات التكاملية $u = u(t)$ وسلوكها المقاربي لما $t \to \infty$. يستحسن استعمال التفسير الحركي 11.13 ـ د.

أ . بخصوص شعاع ابتدائي من النمط f_j (41.13 ـ أ) فإن الحل $f_j(t)$ يساوي اما الشعاع الثابت f_j لما $\lambda_j = 0$ واما شعاعا يبتعد عن

الصفر وفق القانون الاسي (لما $t \to \infty$) على طول المحور f_j لما $\lambda_j > 0$ ، واما شعاعا يقترب من الصفر وفق نفس القانون على طول نفس المحور لما $\lambda_j < 0$

ب. نفرض ان الشعاع الابتدائي من النوع f_j^k اي انه احد اشعة الاساس لفضاء جزئي لا متغير بعده m موصول بخانة جوردانية 41.13(2). إذا استعملنا الدستور الموافق له في 41.13(6) نحصل على الحل:

$$f_j^k(t) = e^{t\lambda_j}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} f_j^1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} f_j^2 + \ldots + \frac{t}{1!} f_j^{k-1} + f_j^k\right]$$

نرى ان نصف القطر الشعاعي للمنحنى التكاملي الموافق له، وهو الشعاع الذي يطابق في اللحظة الابتدائية الشعاع f_j^k يكسب مع الزمن الاحداثيات فإن المركبة وفق الاشعة $f_j^{k-1}, \ldots, f_j^1$ بحيث لما يصبح t كبيرا بكفاية فإن المركبة وفق الشعاع f_j^1 تصبح هي المسيطرة. إذا كان $\lambda_j \geqslant 0$ ، $k > 1$ فإن المنحنى يبتعد، من اجل $t \to \infty$ ، من مصدر الاحداثيات ويصبح مماسه (نرى ذلك بالإشتقاق) في النهاية موازيا للشعاع f_j^1 . من اجل $\lambda_j = 0$ فإن سرعة النقطة المتحركة التي تبتعد عن مصدر الاحداثيات تتغير وفق قانون المنحنى يقترب، لما $t \to \infty$ ، من مصدر الاحداثيات؛ لما كانت المركبة وفق بالقدر الذي نريد، راسه في مصدر الاحداثيات ومحوره موجه على طول f_j^1 ؛ يعني ذلك ان الموقع النهائي لمماسة يطابق المماس للشعاع f_j^1 .

جـ. نفرض ان الشعاع الابتدائي $u(t_0)$ شعاع h_j أو g_j في فضاء جزئي لا متغير، بعده 2 : H_2 ، يوافق خانة جوردانية (2×2) كنا اعتبرناها في (41.13 ـ جـ). تبين حينئذ الدساتير 41.13(7) ان الحل $u(t)$ يرسم في المستوى H_2 :

قطعا ناقصيا متمركز في مصدر الاحداثيات ان كان $\sigma_j = 0$.

لولبا يبتعد عن المصدر إن كان $\sigma_j > 0$.

لولبا يقترب من مصدر الاحداثيات ويؤول الى المصدر لما $t \to \infty$ إن

كان $\sigma_j < 0$.

د . نفرض ان الشعاع الابتدائي $u(t_0)$ شعاعا من الاشعة h_j^k أو g_j^k في فضاء جزئي لا متغير بعده $2m$: H_{2m} يوافق خانة جوردانية بعدها $2m \times 2m$ (المشار اليها في 41.13 ـ د). عندئذ يرسم الحل $u(t)$ في الفضاء H_{2m} إواحــداً من المنحنيين التاليين:

لولبا يبْتعد عن المصدر مماسه يؤول الى موازاة، لما $t \to \infty$ ، مستوى اولى ثنائية من اشعة الاساس، ذلك إن كان $\sigma_j \geqslant 0$.

لولبا يقترب من مصدر الاحداثيات ويؤول اليه لما $t \to \infty$ ، ويصبح مماسا لمستوى اولي ثنائية من اشعة الاساس، ذلك إن كان $\sigma_j < 0$.

ر . في الحالة العامة التي يكون فيها للشعاع $u(t_0)$ عدة مركبات وفق اشعة اساس جورداني، فإن الحركة الموافقة له هي المجموع الهندسي للحركات المعبرة.

71. 13 . يمكن كتابة معادلة سلمية خطية من الرتبة :

$$y^{(n)}(t) = a_1(t)\, y(t) + \ldots + a_n(t)\, y^{(n-1)}(t) \qquad (1)$$

على شكل جملة من الرتبة الاولى بوضع

$$y(t) = u_1(t), \quad y'(t) = u_2(t), \ldots, y^{(n-1)}(t) = u_n(t) \qquad (2)$$

بهذا التعويض لدينا:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = u_3(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) = a_1(t)\, u_1(t) + a_2(t)\, u_2(t) + \ldots + a_n(t)\, u_n(t) \end{cases} \qquad (3)$$

وبالعكس، فإن كل حل $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ للجملة (3) يسمح بتعيين تابع $y(t) = u_1(t)$ ومشتقاته حسب الدساتير (2)، تبين المعادلة الاخيرة (3) ان التابع $y(t)$ يحقق المعادلة (1).

بوضع $a_1(t) = a_1$ ، ... ، $a_n(t) = a_n$) حيث a_1 ، ... ، a_n

ثوابت) نطبق النتائج 41.13 . إن لمصفوفة المؤثر A شكلات خاصالا

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}$$

ليكن $f=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$ شعاعا ذاتيا للمؤثر A يوافق قيمة ذاتية λ . لدينا $Af=\lambda f$ أو ، ضمن الاحداثيات $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$\xi_2=\lambda\xi_1$$
$$\xi_3=\lambda\xi_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+\dots+a_n\xi_n=\lambda\xi_n$$

بوضع $\xi_1=1$ نجد على التوالي:

$$\begin{gathered}\xi_1=1,\ \xi_2=\lambda,\ \xi_3=\lambda^2,\ \dots,\ \xi_n=\lambda^{n-1}\\ a_1+a_2\lambda+\dots+a_n\lambda^{n-1}=\lambda^n.\end{gathered} \tag{4}$$

انها المعادلة المميزة للمعادلة (1)؛ ننتقل من الثانية الى الاولى بتعويض $y^{(k)}$ بـ λ^k ($k=0, 1, \dots, n$).

وهكذا فإن الجذور المميزة للمصفوفة A جذور للمعادلة المميزة (4). ثم إن كل شعاع موصول بقيمة ذاتية λ على استقامة واحدة مع الشعاع ($1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}$) وبالتالي فهو معرف بطريقة وحيدة (بتقدير الاستقامة الواحدة). إذن نرى في الحالة التي يكون فيها λ جذرا تضاعفه m ، بروز خانة جوردانية حقيقية او عقدية ذات m سطراً و m عموداً (بعبارة اخرى، فإن اسس (جمع اس) قوى القوائم الاولية تساوي في هذه الحالة مضاعفات الجذور، وكثير الحدود الاصغرى للمصفوفة A يطابق كثير حدودها المميز [14؛ الفصل 6].)

طبقاً لـ 41.13.13 يمكن كتابة n حلا خاصة ومختلفة للجملة (3)، توافق n شعاعا من الاساس الجورداني باعتبارها اشعة ابتدائية. نقتصر هنا على الكتابة بصراحة اولى مركبات هذه الحلول وهذا نظرا لكون المطلوب

منا هو بالذات المركبة الاولى $u_1(t) = y(t)$ حسب الدساتير (2):

$$u_{j1}(t) = u_{j1}e^{\lambda_j} \qquad (5)$$

وهذا من اجل كل جذر حقيقي بسيط λ_j ؛

$$u_j^1(t) = e^{\lambda_j t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}u_j^1 + \ldots + u_j^s\right], \quad s = 1, \ldots, m \qquad (6)$$

وهذا من اجل كل جذر حقيقي λ_j تضاعفه m ؛

$$\left\{\begin{array}{l} v_j(t) = e^{\sigma_j t}[v_{j1}\cos\tau_j t + w_{j1}\sin\tau_j t], \\ w_j(t) = e^{\sigma_j t}[-v_{j1}\sin\tau_j t + w_{j1}\cos\tau_j t], \end{array}\right. \qquad (7)$$

وهذا من اجل كل جذر بسيط عقدي $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ ؛

$$\left\{\begin{array}{l} v_j^s(t) = e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!}(v_j^1\cos\tau_j t + w_j^1\sin\tau_j t) + \ldots\right. \\ \left.\ldots + (v_j^s\cos\tau_j t + w_j^s\sin\tau_j t)\right], \quad s_j = 1, \ldots, m_j, \\ w_j^s(t) = e^{\sigma_j t}\left[\frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!}(-v_j^1\sin\tau_j t + w_j^1\cos\tau_j t) + \ldots\right. \\ \left.\ldots + (-v_j^s\sin\tau_j t + w_j^s\cos\tau_j t)\right], \quad s_j = 1, \ldots, m_j, \end{array}\right. \qquad (8)$$

وهذا من اجل كل جذر عقدي $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ تضاعفه m_j .

13 .81 . عندما نعوض الحلول المحصل عليها ببعض عباراتها الخطية فإننا نتمكن من الاشارة الى الحلول التالية البالغ عددها n :

أ) لدينا الحل $e^{\lambda_j t}$ من اجل جذر حقيقي بسيط λ_j .

ب) من اجل كل جذر حقيقي λ_j تضاعفه m ، لدينا m حلا:

$$e^{\lambda_j t}, \quad te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_j t}$$

ج) من اجل كل ثنائية جذرين عقديين بسيطين $\lambda_j = \sigma_j \pm i\tau_j$ ، $\tau_j \neq 0$ لدينا حلان:

$$e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t, \quad e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t$$

د) من اجل كل ثنائية جذرين عقديين تضاعفهما m لدينا $2m$ حلا:

$$e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t,\ te^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ te^{\sigma_j t}\sin\tau_j t, \ldots$$
$$\ldots, t^{m-1}e^{\sigma_j t}\cos\tau_j t,\ t^{m-1}e^{\sigma_j t}\sin\tau_j t.$$

13 .91 . نتناول الآن الحالة العامة التي يكون فيها المؤثر $A(t)$ في المعادلة:

$$u'(t) = A(t)\, u(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

متعلقا بالفعل بالوسيط t ؛ في حالة البعد الوحيد لدينا الدستور 13 .21 (2):

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau} u_0$$

نستطيع بطبيعة الحال تشكيل المؤثر $W(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$ ثم العبارة:

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau} u(t_0) = e^{W(t)} u(t_0)$$

لكنها عموما ليست حلا للمعادلة (1). ذلك اننا إذا حاولنا اشتقاق العبارة $e^{W(t)}$ بالنسبة لِـ t فإننا نواجه الصعوبة التالية: يصبح من غير الممكن استخدام المساواة

$$e^{W(t)+h\tilde{A}(t;\, t+h)} = e^{W(t)} e^{h\tilde{A}(t;\, t+h)}$$

لتحويل الفرق:

$$e^{W(t+h)} - e^{W(t)} = e^{W(t)+h\tilde{A}(t;\, t+h)} - e^{W(t)}$$

حيث $\tilde{A}(t;\, t+h)$ يرمز للقيمة المتوسطة للمؤثر $A(\tau)$ من اجل $\tau \in (t;\, t+h)$ لأن العلاقة $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$ القائمة من اجل مؤثرين A وَ B يتبادلان فيما بينهما لا تقوم عموما عندما لا يتبادل A و B. إن المؤثرين $W(t)$ وَ $\tilde{A}(t;\, t+h)$ لا يتبادلان في الحالة العامة إذن فإن مشتق $e^{W(t)}$ ليس عموما مساوياً لِـ $e^{W(t)}W'(t)$.

على الرغم من ذلك يمكن اعتبار العبارة (2)، بمعنى معين، كحل للمعادلة (1). ندخل الآن مفهوم التكامل الضربي.

لتكن $\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = t\}$ تجزئة للمجال $a \leqslant \tau \leqslant t$ ، نقاطها المعلمة $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$. نشكل المؤثر:

$$e^{A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}} e^{A(\xi_{n-2})\Delta t_{n-2}} \ldots e^{A(\xi_0)\Delta t_0} \tag{3}$$

إذا تبادلت المؤثرات $A(\xi)$ من أجل ξ مختلفة، يمكننا وضع هذا المؤثر

على الشكل:

$$e^{A(\xi_0)\Delta t_0+\dots+A(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1}}$$

تـــؤول العبـــارة الاخيرة الى النهـــايـــة $e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}$ لما $d(\Pi)=\max \Delta t_k \to 0$. لكننا رأينا ان هذا المؤثر، عندما لا تتبادل $A(\xi)$ ، لا يمثل حلا للمعادلة (1). يتبين، في حالة عدم تبادل $A(\xi)$ ، ان الحل يمكن تمثيله بالمؤثر المحصل عليه من (3) بجعل $d(\Pi)$ يسعى الى 0 (راجع التمرين 16). نرمز لهذا المؤثر النهاية بـ:

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \qquad (4)$$

ويسمى التكامل الضربي.

نستطيع، بتقدير لامتناهيات في الصغر من رتب عالية، كتابة:

$$e^{A(\xi_j)\Delta t_j} \approx I + A(\xi_j)\,\Delta t_j$$

ونستطيع البرهان (التمرين 14) على ان نفس النهاية (4) نحصل عليها بالإنطلاق من الجداءات:

$$[I+A(\xi_{n-1})\,\Delta\xi_{n-1}]\,[I+A(\xi_{n-2})\,\Delta\xi_{n-2}]\dots[I+A(\xi_0)\,\Delta\xi_0]$$

لهذا السبب نرمز احيانا للتكامل الضربي بـ:

$$\prod_{t_0}^{t}[I+A(t)]\,dt$$

يمكن استعمال التكاملات الضربية في تقديرات الحلول. إلاّ ان مجال تطبيقاتها، بالمقارنة مع النظرية العام للوجود، ليس ذا اهمية؛ وعليه لا نقدم هنا البراهين على القضايا الواردة.

§ 13 .2 . نظرية النقطة الصامدة.

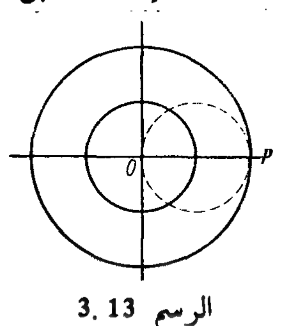
نعتبر في بقية هذا الفصل النظريات الاساسية حول وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية المعتادة. تعتمد كل هذه النظريات على مبدأ هندسي هام في التحليل يسمى **مبدأ النقطة الصامدة**.

12. 13 . لتكن M مجموعة و A تطبيقاً من هذه المجوعة في نفسها، اي

قانونا يصل كل نقطة $x \in M$ بنقطة $y = A(x)$ M .

تعريف. تسمى كل نقطة $x \in M$ يحولها التطبيق A الى نفسه، أي $x = A(x)$ ، نقطة صامدة للتطبيق A .

وهكذا إذا تعلق الامر بتطبيق من قرص مستو في نفسه يصل كل نقطة بنقطة اخرى وفق دوران حول المركز زاويته 90 درجة، فإن النقطة الصامدة الوحيدة هو مركز القرص. إذا كان التطبيق السابق هو التشابه الذي مركزه 0 ونسبته 1:2 متبوعا بانسحاب حتى ملامسة الدائرة الاولى (الرسم 3. 13) فإن نقطة التماس P نقطة صامدة (على الرغم من إنها ليست كذلك بالنسبة للتشابة ولا بالنسبة للانسحاب، المهم هو النتيجة وليس طريقة الوصول اليها). اما اذا تعلق الامر بتطبيق من دائرة في نفسها بواسطة دوران زاويته 90 درجة فإنه لا يقبل نقطة صامدة.



الرسم 3. 13

من المفيد ايجاد شروط عامة (كافية) لوجود نقاط صامدة. نعرض هنا واحدة من ابسط النظريات التي تضمن، تحت بعض الشروط على المجموعة M والتطبيق A ، وجود ووحدانية النقطة الصامدة.

22. 13 . نفرض ان M فضاء متري.

تعريف. نقول عن تطبيق A من الفضاء المتري M في نفسه إنه **مقلص** اذا وجد ثابت θ ، $0 \leqslant \theta < 1$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل كل نقطتين y وَ z في الفضاء M .

$$\rho(A(y), A(z)) \leqslant \theta \rho(y, z)$$

نظرية. (مبدأ النقطة الصامدة لبيكار (Picard) وباناخ). يقبل كل تطبيق مقلص A من فضاء متري تام M في نفسه نقطة ثابتة وحيدة.

البرهان. ننشيء انطلاقاً من نقطة كيفية $x_0 \in M$ متتالية نقاط:

$$x_1 = A(x_0),\ x_2 = A(x_1) = A^2(x_0),\ \ldots,\ x_n = A(x_{n-1}) = A^n(x_0),\ \ldots$$

إن هذه المتتالية كوشية في M .

ذلك انه لدينا من اجل كل $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(A^n(x_0), A^{n+1}(x_0)) \leqslant \\ &\leqslant \theta\rho(A^{n-1}(x_0), A^n(x_0)) \leqslant \theta^n\rho(x_0, x_1)\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \\ &\leqslant [\theta^n + \theta^{n+1} + \ldots + \theta^{n+p-1}]\,\rho(x_0, x_1) \leqslant \\ &\leqslant \theta^n(1 + \theta + \theta^2 + \ldots)\,\rho(x_0, x_1) = \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, x_1); \qquad (1)\end{aligned}$$

تصبح هذه الكمية صغيرة بشكل اختياري عندما يكون n كبيرا بكفاية بما ان M تام فإن النهاية التالية موجودة:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M$$

لنثبت ان x نقطة صامدة. لدينا من أجل $n \geqslant 1$.

$$\rho(A(x), x_n) = \rho(A(x), A(x_{n-1})) \leqslant \theta\rho(x, x_{n-1}) \to 0$$

ومنه:

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

وبالتالي فإن x نقطة صامدة بالفعل.

نفرض وجود نقطة صامدة ثانية y : $A(x) = x$ و $A(y) = y$.

عندئذ:

$$\rho(x, y) = \rho(A(x), A(y)) \leqslant \theta\rho(x, y)$$

إذا كان: $\rho(x, y) \neq 0$ يمكننا تقسيم المساواة على $\rho(x, y)$ فنصل الى التناقض $1 \leqslant \theta < 1$. وبالتالي $\rho(x, y) = 0$ اي $x = y$ ولا توجد نقطة

صامدة غير x . انتهى برهان النظرية.

32. 13 . النقاط الصامدة لتطبيقين مقلصين. نقول عن تطبيقين $A(y)$ وَ $B(y)$ من فضاء متري M في نفسه انهما ε - متدانيين اذا تحققت المتراجحة التالية من اجل كل $y \in M$:

$$\rho(A(y), B(y)) \leqslant \varepsilon$$

توطئة. ليكن $A(y)$ وَ $B(y)$ تطبيقين مقلصين في فضاء متري تام M بحيث

$$\rho(A(y), A(z)) \leqslant \theta_A \rho(y, z) \quad ، \quad \rho(B(y), B(z)) \leqslant \theta_B \rho(y, z)$$

حيث $\theta_A < 1$ ، $\theta_B < 1$ ، وليكن $\theta = \max(\theta_A, \theta_B)$. اذا كان التطبيقان A وَ B ε - متدانين فإن المسافة التي تفصل نقطتيهما الصامدتين لا تتجاوز $\varepsilon/(1-\theta)$.

البرهان. لتكن y_0 نقطة صامدة للتطبيق A . يمكن الحصول على النقطة الصامدة z_0 للتطبيق B حسب الإنشاء 22. 13 ، وهذا باعتبارها نهاية المتتالية $y_0, B(y_0), B^2(y_0), \ldots$. بفضل المتراجحة 22. 13 (1)

$$\rho(y_0, B^n(y_0)) \leqslant \frac{1}{1-\theta} \rho(y_0, B(y_0)) = \frac{1}{1-\theta} \rho(A(y_0), B(y_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

عندما ننتقل الى النهاية $n \to \infty$ نحصل على:

$$\rho(y_0, z_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

وهو المطلوب.

§ 13. 3 . وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية في فضاء نظيمي.

13. 13 . ليكن B فضاء باناخي وَ $\Phi(t, x)$ تطبيقا من الفضاء B في نفسه يتعلق بوسيط حقيقي t ، $a \leqslant t \leqslant b$. ليكن $u(t)$ تابعا شعاعيا قابلا للاشتقاق معرفا على نفس المجال $a \leqslant t \leqslant b$ وقيمة في نفس الفضاء B . إذا عوضنا في التابع $\Phi(t, x)$ المتغير $x \in B$ بالتابع

الشعاعي $u(t)$ نحصل على تابع شعاعي جديد $\Phi[t, u(t)]$ قيمة في الفضاء B ، معرف من اجل $t \in [a, b]$.

نريد حل المعادلة التفاضلية:

$$u'(t) = \Phi[t, u(t)] \qquad (1)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$u(t_0) = u_0, \quad a < t_0 < b, \quad u_0 \in B \qquad (2)$$

إن البحث عن حل للمعادلة التفاضلية (1) مع الشرط الابتدائي (2) يكافىء، عند اتخاذ الفرض الطبيعي الخاص بالاستمرار والذي سنوضحه فيما بعد، البحث عن حل للمعادلة التكاملية:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, u(\tau)]\, d\tau \qquad (3)$$

لأن (3) تأتي من (1) وَ (2) بالمكاملة من t_0 الى t ، ويأتي (2) من (3) بالتعويض $t = t_0$ ، ونحصل على (1) من (3) بالإشتقاق بالنسبة لـ t . وهكذا ترد المسألة الى البحث عن نقطة صامدة للتطبيق:

$$A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau, x(t)]\, d\tau \qquad (4)$$

في الفضاء المؤلف من التوابع الشعاعية $x(t)$

13 .23 . سوف نطبق بطبيعة الحال مبدأ النقطة الصامدة لبيكار - باناخ. لأجل ذلك علينا اعتبار فضاء متري تام M وتطبيق مقلص A يليق بالمسألة المطروحة.

نختار M الفضاء المؤلف من كل التوابع الشعاعية المستمرة $x(t)$ التي تنتمي قيمها الى B والمعرفة في مجال $[t_0 - h, t_0 + h]$ ؛ سنشير الى قيمة h ادناه. نزود الفضاء M بالمسافة التالية:

$$\rho[x_1(t), x_2(t)] = \max_{|t - t_0| \leq h} \| x_1(t) - x_2(t) \|$$

ان الفضاء المتري M المحصل عليه بهذه الطريقة فضاء متري (12 . 32 - ف).

13 .33 . يجب أن يكون التطبيق A من الفضاء M في نفسه، معطى بالدستور 13 .13 (4) . لنوضح الشروط التي يجب فرضها على التابع $\Phi(t, x)$ لكي يكون تعريف التطبيق A سليما . بصفة خاصة، نفرض ان التطبيق $\Phi(t, x)$ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرين t وَ x ؛ يعني ذلك ان من اجل كل t_1 وَ x_1 وَ $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta = \delta(t_1, x_1, \varepsilon)$ بحيث $\| \Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2) \| < \varepsilon$ عندما يكون $\| x_1 - x_2 \| < \delta$، $| t_1 - t_2 | < \delta$. بهذا الفرض، يكون التابع الشعاعي $\Phi(t, x(t))$ مستمراً بالنسبة لِـ t مهما كان التابع المستمر $x(t)$. لذلك نضع من اجل كل t_1 وَ $0 < \varepsilon$ معلومين $x(t_1) = x_1$ ونبحث عن $0 < \delta$ بحيث $\| \Phi(t_1, x_1) - \Phi(t_2, x_2) \| < \varepsilon$ عندما $\| x_1 - x_2 \| < \delta$، $| t_1 - t_2 | < \delta$. ثم نبحث عن $0 < \delta_1$ بحيث $| t_1 - t_2 | < \delta_1$ يستلزم المتراجحة $\| x(t_1) - x(t_2) \| < \delta$. عندئذ، من اجل $| t_1 - t_2 | <$ ، لدينا : $\| \Phi(t_1, x(t_1)) - \Phi(t_2, x(t_2)) \| < \varepsilon$

13 .43 . ثم لكي يتحقق فرض النقطة الصامدة (A تطبيق مقلص) نفرض ان التابع $\Phi(t, x)$ يحقق شرط ليبشيتز وهو : يوجد ثابت C بحيث :

$$\| \Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2) \| \leqslant C \| x_1 - x_2 \| \quad (1)$$

وهذا من اجل كل عنصرين x_1 وَ x_2 في B .

لنبين ان التطبيق 13 .13 (4) مقلص، على الاقل، من اجل h صغير بكفاية ضمن الشروط المذكورة. لدينا بالفعل، من اجل كل نقطتين من الفضاء M اي تابعين شعاعيين $x(t)$ وَ $y(t)$ معرفين على $[t_0 - h, t_0 + h]$ ومستمرين :

$$\rho(A[x(t)], A[y(t)]) = \max_{|t - t_0| \leqslant h} \| A[x(t)] - A[y(t)] \| = \quad (2)$$

$$= \max \left\| \int_{t_0}^{t} \{\Phi(\tau, x(\tau)) - \Phi(\tau, y(\tau))\} d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant h \max_{|t-t_0| \leqslant h} \| \Phi(t, x(t)) - \Phi(t, y(t)) \| \leqslant$$
$$\leqslant Ch \max_{|t-t_0| \leqslant h} \| x(t) - y(t) \| = Ch\rho(x, y),$$

حتى يكون التطبيق مقلصا يكفي اختيار $h < 1/C$.

13 .53 . من حقنا الآن تطبيق مبدأ النقطة الصامدة للبرهان على وجود ووحدانية حل المعادلة 13 .13(1) مع الشرط الابتدائي 13 .13(2). إن هذا الحل معرف الآن فقط على $[t_0 - h, t_0 + h]$ لكنه من الممكن بتطبيق النتيجة المثبتة بصفة متوالية، ان نمدد هذا الحل ليكون معرفا على كل المجال $[a, b]$. يتم ذلك بتثبين القيمة $h = 2/(3C)$ وتطبيق النظرية المبرهنة على نفس المعادلة التفاضلية 13 .13(1) باعتبار الشرط الابتدائي.

$$t_1 = t_0 + h, \quad u^*(t_1) = u(t_1)$$

حيث $u(t_1)$ هي قيمة الحل المشيد على $[t_0 - h, t_0 + h]$ عند $t = t_1$. نصل الى حل جديد $u^*(t)$ معرف على المجال $[t_1 - h, t_1 + h]$. ثم إن وحدانية الحل تبين ان $u^*(t)$ وَ $u(t)$ متطابقان على الجزء المشتركة من ساحتي تعريفهما يتعلق الامر اذن بحل المعادلة 13 .13(3) المعرفة على المجال $[t_0 - h, t_0 + 2h]$.

بمواصلة هذه العملية عدداً منتهياً من المرات نصل الى تعريف حل على كل المجال $[a, b]$.

برهنا في الاخير على النظرية التالية:

نظرية. إذا كان التابع $\Phi(t, x)$ معرفا من اجل $a \leqslant t \leqslant b$ ، $x \in B$ ومستمرا بالنسبة لمجموعة المتغيرين ويتمتع على كل المجال $a \leqslant t \leqslant b$ بشرط ليبشيتز 13 .43(1)، فإن المعادلة 13 .13(1) مع الشرط 13 .13(2) يقبل حلا $u = u(t)$ معرفا على كل المجال $[a, b]$ وهو وحيد في صف كل التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق $x(t)$ ، $t \in [a, b]$ ،

التي تأخذ قيمها في الفضاء B .

63. 13 . نشير الى الحالة التي يكون فيها التابع الشعاعي $\Phi(t, x)$ ، من اجل كل $t \in [a, b]$ ، يطبق فضاء جزئياً مغلقا مثبتا $B_1 \subset B$ في نفسه، عندئذ إذا اخترنا شعاعا ابتدائيا u_0 في نفس الفضاء الجزئي B_1 فإن الحل الموافق له $u(t)$ ينتمي الى الفضاء الجزئي B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$. ذلك اننا نستطيع في هذه الوضعية، من البداية اعتبار الفضاء الجزئي B_1 بدل الفضاء B . نصل الى حل في الفضاء الجزئي B_1 ؛ بمراعاة نظرية الوحدانية فإنه لا يوجد في الفضاء B اي حل للمعادلة 13. 13 (1) التي تحقق الشرط $u(t_0) = u_0 \in B_1$.

73. 13 . الحل بصفته تابعا مستمرا للشعاع الابتدائي. نرمز هنا لحل المعـــادلـــة 13. 13 (1) مـــع الشرط الابتـــدائـــي 13. 13 (2) بـ: $u(t;\ t_0, u_0)$. إنه تـابـع يصـل كـل شعـاع $u_0 \in B$ بـالشعـاع $u(t;\ t_0, u_0)$ الذي يتعلق بـ t_0 و t بصفتهما وسيطين عددين. لنثبت، باعتبار فرض النظرية 13. 53، من اجل t_0 و t مثبتين، ان الشعاع $u(t;\ t_0, u_0)$ تابع مستمر لِـ u_0 .

نعتبر التطبيقين:

$$A[x(t)] = u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau,\ x(\tau)]\, d\tau$$

$$B[x(t)] = u_1 + \int_{t_0}^{t} \Phi[\tau,\ x(\tau)]\, d\tau$$

نقطتاهما الصامدتان حلان للمعادلة 13. 13 (1) بالشعاعين الابتدائيين u_0 و u_1 على التوالي. نلاحظ في الفضاء M المؤلف من التوابع الشعاعية $x(t)$ المعرفة والمستمرة على $[t_0 - h, t_0 + h]$ ، حيث $h < 1/C$ ، انها تطبيقـــات مقلصـــة بنفس القيمـــة $\theta = Ch < 1$. إذا كـــان: $|u_0 - u_1| < \varepsilon$ فان هذين التطبيقين ع (13 . 32) اذن فان المسافة التي

تفصل نقطتيها الصامدتين لا تتجاوز $\varepsilon/(1-\theta)$. بعبارة اخرى .

$$\max_{|t-t_0|\leqslant h} |u(t;\, t_0,\, u_0)-u(t;\, t_0,\, u_1)| < \frac{\varepsilon}{1-\theta}$$

وهكذا إذا كان الفرق بين الحلين عند $t = t_0$ اصغر من ε فهو اصغر من $\varepsilon/(1-\theta)$ في المجال: $|t - t_0| \leqslant h$. إذا حولنا النقطة الابتدائية من t_0 الى $t_1 = t_0 + h$ نحصل، كما في 53.13 ، على امكانية تمديد الحل في المجال: $t_0 \leqslant t_0 + h \leqslant t_0 + 2h$ ؛ بتكرار هذه العملية نرى ان انحراف الحلين في هذا المجال لا يتجاوز $\varepsilon/(1-\theta)^2$. نواصل العملية فنصل الى المتراجحة:

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} |u(t;\, t_0,\, u_0)-u(t;\, t_0,\, u_1)| < \frac{\varepsilon}{(1-\theta)^m}$$

حيث: $m = \left[\frac{b-a}{h}\right] + 1$ ؛ انتهى برهان القضية.

83.13 . المؤثرات الحالة. ليكن $u_0 \in B$ شعاعا كيفيا وَ $u(t)$ حلا للمعادلة 13.13 (1) مع الشرط $u(t_0) = u_0$ كشرط ابتدائي. ان الشعاع $u = u(t)$ معرف بطريقة وحيدة من اجل كل $t \in [a, b]$. إنه يتعلق بـ u_0 وكذا بـ t_0 وَ t . نشير لذلك كما يلي: $u(t) = \Omega_{t_0}^{t}(u_0)$

يرمز $\Omega_{t_0}^{t}$ هنا لتطبيق من الفضاء B في نفسه ويسمى **مؤثرا حالا** للمعادلة 13.13 (1).

وهكذا فإن المؤثر الحال للمعادلة الخطية المتجانسة $u'(t) = Au(t)$

يكتب على الشكل (13.13):

$$\Omega_{t_0}^{t} = e^{(t-t_0)A}$$

أ . يبين 73.13 ان المؤثر $\Omega_{t_0}^{t}$ مستمر: إذا آلت متتالية اشعة: $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_0^{(n)}, \ldots$ من الفضاء B الى شعاع u_0 ،

فإن المتتالية الموافقة لها: $u_1^{(n)} = \Omega_{t_0}^{t}(u_0^{(n)})$ تؤول الى الشعاع $u_1 = \Omega_{t_0}^{t}(u_0)$.

ب . من البهديهي ان $\Omega_{t_0}^{t_0}(u_0) = u_0$ بحيث ان $\Omega_t^t = E$ مؤثر مطابق.

ج . لنبرهن على المساواة:

$$\Omega_{t_0}^{t_2} = \Omega_{t_1}^{t_2}\Omega_{t_0}^{t_1} \tag{1}$$

وهذا مهما كان t_0, t_1, t_2 في $[a, b]$.

ليكن $u_1 = \Omega_{t_0}^{t_1}(u_0)$ وَ $u_2 = \Omega_{t_1}^{t_2}(u_1)$. ان الشعاع u_1 هو قيمة الحل $u(t)$ للمعادلة 13 .13(1) عند $t = t_1$ وهو الحل الذي يأخذ القيمة u_0 عند $t = t_0$. اما الشعاع u_2 فهو قيمة الحل، من اجل $t = t_2$ ، الذي يأخذ القيمة u_1 عند $t = t_1$. بمراعاة وحدانية الحل نلاحظ ان هذين الحلين متطابقان، وهو ما يثبت (1).

د . بوضع $t_2 = t_0$ في (1) نجد $E = \Omega_{t_1}^{t_0}\Omega_{t_0}^{t_1}$ ومنه يتبين أن المؤثر $\Omega_{t_0}^{t_1}$ يقبل القلب.

ر . يمكن ان نضع المساواة $\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t)$ على الشكل:

$$\frac{d(\Omega_{t_0}^{t}(u_0))}{dt} = A(t)[\Omega_{t_0}^{t}(u_0)] \tag{2}$$

أو:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^{t}}{dt} = A(t)\Omega_{t_0}^{t} \tag{3}$$

هذا مع فهم الرمز الاخير على ان المساواة (2) محققة من اجل كل عنصر $u_0 \in B$.

93. 13 . فرضنا ان التابع $\Phi(t, x)$ معرف من اجل كل $t \in [a, b]$ وَ $x \in B$. يمكن البرهان على وجود ووحدانية حل المعادلة 13 .13(1) في جواد نقطة t_0 مع الشرط 13 .13(2) باعتبار افتراضات اضعف وهي:

يجب ان يكون التابع $\Phi(t, x)$ معرفا من اجل $a \leqslant t \leqslant b$ ولا يجب ان يكون مستمرا ويحقق شرط ليبشيتز الآ في كره:

$$V = \{x \in B : \|x - u_0\| \leqslant r\}.$$

في هذه الحالة، إذا كان h صغيراً بكفاية فإن المؤثر A يحول كل تابع مستمر $x(t)$ قيمة في الكرة V الى تابع قيمة في نفس الكرة. وبالتالي يمكن انجاز البرهان على وجود ووحدانية الحل بتعويض الفضاء المتري المؤلف من كل التوابع $x(t)$ المستمرة على $[t_0 - h, t_0 + h]$ بالفضاء المتري M_V المؤلف من التوابع $x(t)$ التي تأخذ قيمها في الكرة V. الآ ان التابع المحصل عليه عموماً لا يقبل التمديد على كل المجال $a \leqslant t \leqslant b$.

هناك وضعية مماثلة في الحالة التي يكون فيها التابع $\Phi(t, x)$ معرفاً ومستمراً من اجل $a \leqslant t \leqslant b$، في كل الفضاء B، لكن الثابت C في شرط ليبشيتز يتعلق بالمسافتين من مصدر الاحداثيات الى النقطتين x_1 وَ x_2 بحيث اي شرط ليبشيتز يأخذ الشكل:

$$\|\Phi(t, x_1) - \Phi(t, x_2)\| \leqslant C(r) \|x_1 - x_2\|$$

وهذا مهما كان x_1 وَ x_2 في الكرة $\|x\| \leqslant r$. ان الحل موجود في هذه الحالة، كما هو الحال آنفا، ووحيد في جوار للقيمة $t_0 \in [a, b]$، لكنه لا يقبل عموما التمديد حتى حافة المجال $[a, b]$.

نعتبر على سبيل المثال المعادلة $x'(t) = x^2(t)$ على المجال $-1 \leqslant t \leqslant 1$. إن طرفها الثاني مستمر من اجل كل $x \in R_1$؛ لدينا:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \, |x_1 - x_2| \leqslant 2r \, |x_1 - x_2|$$

وهذا مهما كان x_1 وَ x_2 في المجال $|x| \leqslant r$. إن الشكل الذي يأخذه حل المعادلة المعطاة باعتبار الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$ هو:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

وهو لا يقبل التمديد على كل المجال $-1 \leqslant t \leqslant 1$ ان كان $|x_0| \geqslant 1$

§ 13 .4 . جمل المعادلات الشعاعية

13 .14 . ليكن B فضاء باناخي ولتكن n تابعاً:

$$\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n)$$

يتعلــق كــل منها بــوسيــط حقيقــي $t \in [a, b]$ وبـ n متغيراً $x_1, \ldots, x_n$ ترسم B ، يأخذ كل تابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ قيمة في الفضاء B . نعتبر جملة المعادلات التفاضلية:

$$\left.\begin{array}{l} u_1'(t) = \Phi_1(t, u_1, \ldots, u_n), \\ u_2'(t) = \Phi_2(t, u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) = \Phi_n(t, u_1, \ldots, u_n) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

بالشروط الابتدائية:

$$u_1(t_0) = p_1 \in \mathrm{B}, \ldots, u_n(t_0) = p_n \in \mathrm{B}, a \leqslant t_0 \leqslant b \qquad (2)$$

بطبيعة الحال نسمي حلا للجملة (1) بالشروط الابتدائية (2) كل جملة توابع شعاعية $u_1(t), \ldots, u_n$ معرفة من اجل $a \leqslant t \leqslant b$ تحقق كل معادلات الجملة (1) وكذا الشروط (2).

يكون تابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ مستمرا بالنسبة لمجموعة المتغيرات: $t, x_1, \ldots, x_n$ إذا تمكنا من اجل كل $t, x_1, \ldots, x_n$ وَ $\varepsilon > 0$ ، من ايجاد عدد $\delta > 0$ بحيث تستلزم العلاقات.

$$|\bar{t} - t_0| < \delta, \ \|\bar{x}_1 - x_1\| < \delta, \ldots, \|\bar{x}_n - x_n\| < \delta$$

المتراجحة:

$$\|\Phi_k(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \varepsilon$$

ذلك هو تعريف الاستمرار نقول عن التابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ انه يحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات $x_1, \ldots, x_n$ اذا وجد ثابت C بحيث:

$$\|\Phi_k(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \|\bar{x}_j - x_j\|$$

مهما كانت العناصر : $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$

البالغ عددها $2n$ ، في الفضاء B .

24.13 . لدينا النظرية التالية:

نظرية. اذا كانت التوابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ مستمرة بالنسبة لمجموعة المتغيرات $t, x_1, \ldots, x_n$ ، وتحقق شرط ليبشيتنز بالنسبة للمتغيرات $x_1, \ldots, x_n$ فإن الجملة 14.13(1) بالشروط 14.13(2) تقبل حلا $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ وحيدا في صنف كل العناصر $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ التي يمكن انشاؤها بواسطة التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق الآخذة قيمها في الفضاء B .

البرهان. ننشىء فضاء شعاعيا نظيميا جديداً B^n المؤلف من العناصر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ المشكلة من n عنصرا تنتمي الى الفضاء B . تتم العمليتان الخطيتان في الفضاء B^n احداثية: احداثية اذا كان $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ و $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B^n$ فإن:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

تثبت الخاصيات اللازمة للعمليتين الخطتيين اللتين ادخلناهما آنفا انطلاقا من الخاصيات المناسبة لها الخاصة بالعمليتين الخطيتين في الفضاء B . ثم نختار في B^n النظيم:

$$|||x||| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|. \qquad (1)$$

تستنتج الخاصيات اللازمة للنظيم في الفضاء B^n ، بسهولة، من الخاصيات المناسبة لها الخاصة بالنظيم في الفضاء B . إن التقارب بالنظيم (1) في الفضاء B^n هو التقارب بالنسبة لكل احداثية في الفضاء B . اخيراً . بما ان الفضاء B تام، نستطيع البرهان بسهولة على نفس الخاصية فيما يخص B^n

يمكن اعتبار جملة التوابع:

$$
(2) \qquad \left.\begin{aligned}
y_1 &= \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n),\\
y_2 &= \Phi_2(t, x_1, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}\right\}
$$

كتابع واحد $y = \Phi(t, x)$ من الفضاء B^n في نفسه. لنثبت ان الافتراضات الواردة اعلاه حول التوابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ نستلزم استمرار التابع $\Phi(t, x)$ بالنسبة لمجموعة المتغيرات وهي تحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغير x. من اجل $t, x_1, \ldots, x_n$ و $\varepsilon > 0$ معلومة، نبحث عن عدد δ انطلاقا من شرط استمرار كل التوابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ بحيث اذا كان:

$$
|||\bar{x} - x||| = \sum_{j=1}^{n} \|\bar{x}_j - x_j\| < \delta,
$$

حيث $|\bar{t} - t| < \delta$ و $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, x_n)$ فإن

$$
\|\Phi_j(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n)\| < \frac{\varepsilon}{n}
$$

ينتج من ذلك:

$$
|||\Phi(\bar{t}, \bar{x}) - \Phi(t, x)||| =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \|\Phi_j(\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \varepsilon
$$

وبالتالي فإن التابع $\Phi(t, x)$ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات ثم ينتج من شرط ليبشيتز على التوابع $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ ان:

$$
|||\Phi(t, \bar{x}) - \Phi(t, x)||| =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} \|\Phi_j(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C \|\bar{x}_k - x_k\| = Cn |||\bar{x} - x|||,
$$

بحيث ان $\Phi(t, x)$ يحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغير x .

يتبين من النظرية 53.13 ان المعادلة التفاضلية:

$$
(3) \qquad u'(t) = \Phi(t, x)
$$

من اجل تابع شعاعي $u(t)$ قيمة في الفضاء B^n ، بالشرط الابتدائي:

$$u(t_0) = p = (p_1, \ldots, p_n) \in B^n \tag{4}$$

تقبل حلا $u(t)$ معرفا من اجل $t \in [a, b]$ وهو ل وحيد في صنف التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق $x(t)$ التي تأخذ قيمها في الفضاء B^n. بما أن، طبقا للتعريف:

$$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)),\ u'(t) = (u_1'(t), \ldots, u_n'(t)),$$

المعادلة التفاضلية (3) بالشرط (4) من اجل تابع $u(t)$ تكافىء الجملة 14. 13 (1) بالشروط 14. 13 (2) من اجل التوابع $u_1(t), \ldots, u_n(t)$. انتهى برهان النظرية.

34. 13 . إذا وجد فضاء جزئي مغلق $B_1 \subset B$ بحيث تكون، من اجل كل $t \in [a, b]$ و $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B_1$ ، قيم $\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ والاشعة الابتدائية $p_1, \ldots, p_n$ منتمية الى B_1 ، فإن قيم كل التوابع $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ التي تمثل حل الجملة 14. 13 (1) بالشروط 14. 13 (2)، تنتمي هي الاخرى الى الفضاء B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$.

لرؤية ذلك نعتبر في B^n . الفضاء الجزئي B_1^n المؤلف من الاشعة: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ التي تنتمي كل احداثية لها الى الفضاء الجزئي $B_1 \subset B$. من السهل اثبات ان B_1^n مغلق في B^n . ان التحويل 24. 13 (2) يطبق فرضا B_1^n في نفسه. وبالتالي، عند مراعاة الملاحظة 93. 13 ، إذا كان الشعاع $(p_1, \ldots, p_n)$ ينتمي الى B_1^n، فإن الامر كذلك بالنسبة للحل: $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ من اجل كل $t \in [a, b]$ ، وهو المطلوب.

§ 13 .5 المعادلات الشعاعية من الرتب العالية.

15. 13 . نعتبر مرة اخرى فضاء باناخي B وليكن $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ تابعا لوسيط حقيقي t ، $a \leqslant t \leqslant b$ ولـ n نقطة $x_1, \ldots, x_n$ من الفضاء B قيمة في نفس الفضاء . لتكن:

$$u^{(m)}(t) = \Phi(t, u(t), \ldots, u^{(m-1)}(t)) \tag{1}$$

معادلة تفاضلية من الرتبة m ، مرفوفة بالشروط الابتدائية:

$$(2) \quad u(t_0)=p_1 \in \mathrm{B}, \quad u'(t_0)=p_2 \in \mathrm{B}, \ldots, u^{(m-1)}(t_0)=p_m \in \mathrm{B}$$

نظرية. إذا كان التابع $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ مستمراً بالنسبة لمجموعة المتغيرات $t, x_1, \ldots, x_m$ وتتمتع بشرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات $x_1, \ldots, x_m$ فان المعادلة (1) مع الشروط (2) تقبل حلا $u=u(t)$ وحيدا في صنف كل التوابع القابلة للإشتقاق m مرة: $x(t)$ التي تأخذ قيمها في B .

البرهان. بالإضافة الى المعادلة (1) والشروط (2) نعتبر جملة المعادلات التفاضلية:

$$(3) \quad \left.\begin{array}{l} u_1'(t)=u_2(t), \\ u_2'(t)=u_3(t), \\ \cdots\cdots \\ u_{m-1}'(t)=u_m(t), \\ u_m'(t)=\Phi(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \end{array}\right\}$$

بالشروط الابتدائية

$$(4) \quad u_1(t_0)=p_1, \ldots, u_m(t_0)=p_m.$$

إن الجملة (3) حالة خاصة من الجملة 13 .14(1) نحصل عليها بوضع.

$$(5) \quad \left.\begin{array}{l} \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_m) \equiv x_2, \\ \Phi_2(t, x_1, \ldots, x_m) \equiv x_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{m-1}(t, x_1, \ldots, x_m) \equiv x_m, \\ \Phi_m(t, x_1, \ldots, x_m) \equiv \Phi(t, x_1, \ldots, x_m). \end{array}\right\}$$

نلاحظ في هذه الحالة أن كل التوابع:

$$\Phi_k(t, x_1, \ldots, x_m) \quad (k=1, \ldots, m)$$

مستمرة بالنسبة لمجموعة المتغيرات $t, x_1, \ldots, x_m$ وتحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات $x_1, \ldots, x_m$ ؛ ذلك امر بديهي من اجل التوابع Φ_k الاولى حتى الرتبة $m-1$ ، اما فيما يتعلق بالتابع الاخير فالنتيجة يعطيها الفرض.

وبالتالي، بمراعاة النظرية 13 .24 ، فإن الجملة (3) بالشروط (4) تقبل

حلا $u_1(t), \ldots, u_m(t)$. نضع $u(t) \equiv u_1(t)$. تبين المعادلة الاولى من الجملة (3) أن $u'(t) = u_2(t)$، وتبين الثانية ان $u''(t) = u_2'(t) = u_3(t)$، الخ؛ تثبت المعادلة ذات الرتبة $(m-1)$ أن $u^{(m-1)}(t) = u_{m-1}'(t) = u_m(t)$، وفي الختام تبين المعادلة الاخيرة أن:

$$u^{(m)}(t) = u_m'(t) = \Phi(t, u, u', \ldots, u^{(m-1)})$$

وهكذا يتضح ان التابع الشعاعي $u(t)$ يحقق المعادلة (1). بما ان الشروط (4) محققة ايضا، فإن هذا التابع يحقق الشروط (2). وعليه تقبل المعادلة (1) مع الشروط (2) حلا. لنثبت ان هذا الحل وحيد. إن كان $\bar{u}(t)$ حلا كيفيا للمعادلة (1) مع الشروط (2) فإن جملة التوابع:

$$\bar{u}_1(t) \equiv \bar{u}(t), \quad \bar{u}_2(t) \equiv \bar{u}'(t), \ldots, \bar{u}_m(t) = \bar{u}^{(m-1)}(t)$$

تحقق بطبيعة الحال الجملة (3) بالشروط (4)؛ ثم إن النظرية 13 .24 تبين ان حل الجملة (3) مع الشروط (4) وحيد، ولذا:

$$\bar{u}(t) \equiv \bar{u}_1(t) \equiv u_1(t) \equiv u(t)$$

وهو المطلوب.

13 .25 . نفرض وجود فضاء جزئي مغلق $B_1 \subset B$ بحيث يأخذ التابع $\Phi(t, x_1, \ldots, x_m)$ قيمة في B_1 مهما كان $t \in [a, b]$ و $x_1 \in B_1, \ldots, x_m \in B_1$.

إذا كانت زيادة على ذلك الاشعة $p_1, \ldots, p_m$ الواردة في الشروط الابتدائية للمعادلة (1) تنتمي هي الاخرى الى الفضاء الجزئي B_1 فإن الحل الموافق لذلك $u(t)$ ينتمي ايضا الى B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$.

ذلك أن، ضمن الشروط الواردة، كل توابع الجملة 13 .15(5) تأخذ قيمها في B_1 إن كان: $x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_1$. ينتج من $p_1 \in B_1, \ldots, p_m \in B_1$ بفضل الملاحظة 12 .35 ان

$u_1(t) \in B_1, \ldots, u_m(t) \in B_1$ من اجل كل $t \in [a, b]$.

بما أن: $u_1(t) \equiv u(t)$ فإننا نصل الى النتيجة المطلوبة.

§ 13 6 المعادلات والجمل الخطية.

13 .16 . نعتبر مؤثرا خطيا محدودا $A(t)$ في فضاء شعاعي نظيمي B يتعلق بوسيط t، $a \leqslant t \leqslant b$. نقول عن المؤثر $A(t)$ انه يتعلق باستمرار بـِ t إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta > 0$ بحيث: $\|A(\bar{t}) - A(t)\| < \varepsilon$ عندما يكـون $|\bar{t} - t| < \delta$ (يـرمـز هنـا $\| \ \|$ لنظيم مؤثر خطي (17.12 ـ ب)).

نقول عن تابع $\Phi(t, x)$ قيمه في الفضاء B إنه من الدرجة الاولى بالنسبة للمتغير $x \in B$ إن كان:

$$\Phi(t, x) = A(t)x + b(t),$$

حيث $A(t)$ مؤثر خطي محدود يتعلق باستمرار بالوسيط t وَ $b(t)$ تابع مستمر قيمه في الفضاء $\bar{B}$.

لنثبت ان كل تابع $\Phi(t, x)$ من النمط (1) مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرين t، x.

يمكن اعتبار المؤثر $A(t)$ كتابع مستمر لـِ t قيمه في الفضاء النظيمي $L(B)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المحدودة في B (37.12 ـ أ). إن مثل هذا التابع محدود بالضرورة على المجال $a \leqslant t \leqslant b$، إذن:

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|A(t)\| \equiv A < \infty.$$

من اجل $\varepsilon > 0$، t، x معلومة، نبحث عن $\delta = \delta(\varepsilon, t, x)$ بحيث نحصل على المتراجحتين:

$$\|x\| \, \|A(\bar{t}) - A(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

وهذا لما $|\bar{t} - t| < \delta$. حينئذ نحصل من اجل نفس الاعداد t

ومن اجل $\bar{t}$، $\|\bar{x}-x\| < \varepsilon/(3A)$، على:

$$\|\Phi(\bar{t}, \bar{x}) - \Phi(t, x)\| =$$
$$= \|A(\bar{t})\bar{x} - A(\bar{t})x + A(\bar{t})x - A(t)x + b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A(\bar{t})\| \|\bar{x}-x\| + \|A(\bar{t}) - A(t)\| \|x\| + \|b(\bar{t}) - b(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant A\frac{\varepsilon}{3A} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

وبذلك ينتهي برهان الاستمرار المطلوب.

نبين الآن ان كل تابع من النمط (1) يتمتع بشرط ليبشيتز بالنسبة للمتغير x بالثابت $C = A = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|A(t)\|$.

نلاحظ من تعريف نظيم مؤثر ان لدينا:

$$\|\Phi(t, \bar{x}) - \Phi(t, x)\| = \|A(t)\bar{x} - A(t)x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A(t)\| \|\bar{x}-x\| \leqslant A\|\bar{x}-x\|,$$

وهو المطلوب.

13. 26 . بتطبيق النظرية 13. 53 نصل الى النتيجة التالية:

نظرية. تقبل كل معادلة تفاضلية خطية

$$(1) \quad u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$$

حيث $A(t)$ مؤثر خطي محدود في الفضاء B يتعلق باستمرار بالوسيط $t \in [a, b]$ وَ $b(t)$ تابع مستمر قيمه في B مع الشرط الابتدائي:

$$(2) \qquad u(t_0) = u_0,$$

تقبل حلا $u = u(t)$ وحيداً هو تابع قابل للإشتقاق قيمه في B.

13. 36 . **جمل المعادلات الخطية.** لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} u_1'(t) = A_{11}(t)u_1(t) + \ldots + A_{1n}(t)u_n(t) + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) = A_{n1}(t)u_1(t) + \ldots + A_{nn}(t)u_n(t) + b_n(t), \end{array}\right\}$$

حيث $A_{jk}(t)$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ مؤثرات خطية محدودة في الفضاء B تتعلق باستمرار بالوسيط $t \in [a, b]$ ، اما $b_1(t), \ldots, b_n(t)$

فهي توابع شعاعية مستمرة لـِ t قيمها في B. نضيف للجملة (1) الشرط الابتدائي

$$(2)\quad u_1(t_0) = p_1 \in B, \ldots, u_n(t_0) = p_n \in B,\ a \leqslant t_0 \leqslant b.$$

نظـــريـــة. تقبـــل الجملـــة (1) بـــالشرط الابتـــدائـــي (2) حلا $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ يتألف من توابع شعاعية لـِ $t \in [a, b]$, قيمها في B ، وهذا الحل وحيد.

البرهان. إن الجملة (1) حالة خاصة من الجملة المعتبرة في 13 .14:

$$u_1'(t) = \Phi_1(t, u_1, \ldots, u_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n'(t) = \Phi_n(t, u_1, \ldots, u_n).$$

نحصل على هذه الحالة بوضع:

$$(3)\quad \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) = A_{k1}(t)x_1 + \ldots + A_{kn}(t)x_n + b_k(t)$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

لتطبيق النظرية 13 .24 يجب ان نفرض بان كل تابع (3) مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات $t, x_1, \ldots, x_n$. وكنا رأينا في 13 . 16 ان كل حد $A_{km}(t)x_m$ وَ $b_k(t)$ يحققان هذه الشروط، وبالتالي فالامر كذلك فيما يخص مجموعها (3). ننهي البرهان بتطبيق النظرية 13 .24.

13 .46 . إذا طبقت المؤثرات $A_{jk}\ (j, k = 1, \ldots, n)$, من اجل كل $t \in [a, b]$, فضاء جزئيا مثبتا $B_1 \subset B$ في نفسه وكانت التوابع $b_j(t)$ ، من اجل $t \in [a, b]$, تأخذ قيمها في هذا الفضاء الجزئي B_1. فإن التـوابـع $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ التي تشكـل حـل الجملـة 13 .36(1) بالشروط 13 .36(2)، تأخذ قيمها في الفضاء الجزئي B_1. ذلك ان التوابع:

$$\Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n) = A_{j1}. + A_{jn}(t)x_n\ (j=1, \ldots, n),$$

من اجل $x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_1$ ، تأخذ قيمها في الفضاء الجزئي B_1. ويمكننا تطبيق 13 .34.

56. 13 . المعادلات الخطية من الرتب العالية. نعتبر معادلة خطية من الرتبة n

$$(1) \quad u^{(n)}(t) = A_1(t)\, u(t) + \ldots + A_n(t)\, u^{(n-1)}(t) + b(t)$$

بالنسبة للتابع المجهول $u(t)$ الذي يأخذ قيمه في الفضاء B ، مع الشروط الابتدائية:

$$(2) \quad u(t_0) = p_1 \in B, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = p_n \in B.$$

يمثل هنا $A_k(t)$، من اجل كل $t \in [a, b]$، مؤثرا خطيا محدودا في الفضاء B ، اما $b(t)$ فهو تابع مستمر قيمه في نفس الفضاء.

نظرية. تقبل المعادلة الخطية (1) بالشروط الابتدائية (2) حلا $u(t)$ وحيدا في صنف كل التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق n مرة، التي تأخذ قيمها في الفضاء B.

البرهان. إن المعادلة (1) حالة خاصة من المعادلة المعتبرة في 15. 13 :

$$u^{(n)}(t) = \Phi(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}).$$

نحصل على هذه الحالة بوضع:

$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = A_1(t)\, x_1 + \ldots + A_n(t)\, x_n + b(t).$$

كنا رأينا في 36. 13 ان التابع Φ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات. $t, x_1, \ldots, x_n$ وتحقق شرط ليبشيتز بالنسبة لـ $x_1, \ldots, x_n$. وعليه فإن النظرية 15. 13 قائمة. بتطبيق هذه النظرية نحصل على النتيجة المطلوبة.

66. 13 . إذا طبقت المؤثرات $A_1(t), \ldots, A_n(t)$، من اجل كل $t \in [a, b]$، فضاء جزئيا مثبتا $B_1 \subset B$ في نفسه وإذا كان التابع $b(t)$ يأخذ قيمه في هذا الفضاء الجزئي فإن الحل $u(t)$ للمعادلة 56. 13(1) بالشروط 56. 13(2) ينتمي، مهما كانت الاشعة الابتدائية $p_1, \ldots, p_n$ في B_1 ومهما كان $t \in [a, b]$، الى الفضاء الجزئي B_1 .

لتأكد من ذلك نلاحظ، ضمن الشروط الواردة، ان فرض الملاحظة 46. 13 محقق؛ بتطبيق هذه الملاحظة نحصل بصفة خاصة على ان

$u_1(t) \equiv u(t)$ ينتمي الى B_1 من اجل كل $t \in [a, b]$، وهو المطلوب.

§ 7. 13 . المؤثر الحال لمعادلة خطية متجانسة.

17. 13 . تسمى المعادلة 26. 13 (1) لما: $b(t) \equiv 0$:

$$u'(t) = A(t)\, u(t)$$

معادلة خطية متجانسة.

تقبل المعادلة المتجانسة حلا بديهيا $u(t) \equiv 0$. اما باقي الحلول للمعادلة المتجانسة فهي لا تنعدم في اية نقطة $t \in [a, b]$ حسب نظرية الوحدة 26. 13 .

بجمع حلول للمعادلة المتجانسة (1) او ضربها في اعداد نحصل على حلول أخرى لنفس المعادلة. إذا انه اذا كان $u_1(t)$ وَ $u_2(t)$ حلين للمعادلة (1) فإن لدينا، مهما كان العددان α_1 وَ α_2،

$$\begin{aligned}(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t))' &= \alpha_1 u_1'(t) + \alpha_2 u_2'(t) = \\ &= \alpha_1 A(t)\, u_1(t) + \alpha_2 A(t)\, u_2(t) = \\ &= A(t)\, [\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)],\end{aligned}$$

إذن فإن $\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$ حل للمعادلة (1). نعتبر المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^t$ (83. 13) للمعادلة المتجانسة (1). إن هذا المؤثر خطي أي ان لدينا المساواة التالية مهما كان الشعاعان u_1 ، u_2 والعددان α_1 ، α_2 :

$$\Omega_{t_0}^t[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1\, \Omega_{t_0}^t(u_1) + \alpha_2 \Omega_{t_0}^t(u_2).$$

ذلك ان الطرف الثاني باعتباره تابعا لِـ t عبارة خطية لحلول للمعادلة (1)، قيمتها عند $t = t_0$ هي: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. يتبين مما سبق ان راينا ان الطرف الثاني حل للمعادلة (1). اما الطرف الاول فهو حسب التعريف حل للمعادلة (1) يأخذ القيمة $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ عند $t = t_0$. إن هذه الحلول تتطابق من اجل كل $t \in [a, b]$ حسب

نظرية الوحدانية، ذلك هو المطلوب.

إذن فإن المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^{t}$ للمعادلة الخطية المتجانسة (1) مؤثر خطي. نذكر، حسب 83.13، انه مستمر وقابل للقلب. نكتب فيما يلي $\Omega_{t_0}^{t}(u)$ بدل $\Omega_{t_0}^{t}u$.

13. 27 . لندرس بنية المؤثر الحال للمعادلة المتجانسة 17.13(1) في الفضاء ذي البعد n R_n المؤلف من الاشعة ذات الشكل $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

نختار في الفضاء R_n n شعاعا مستقلة خطيا وكيفية $f_1, \ldots, f_n$.
حينئذ توافق المعادلة الشعاعية 17.13(1) بالنسبة للتابع الشعاعي المجهول $u(t) = \sum u_k(t) f_k$ جملة المعادلات السلمية:

$$(1) \quad \begin{cases} u_1'(t) = a_{11}(t)\, u_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)\, u_n(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) = a_{n1}(t)\, u_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)\, u_n(t). \end{cases}$$

يمكن ان نصل المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^{t}$ ، حسب القواعد العامة 17.12 - أ، بالمصفوفة التي يتألف عمودها ذو الرتبة k من احداثيات الشعاع $\Omega_{t_0}^{t} f_k \; (k = 1, \ldots, n)$. بعبارة اخرى فإننا نصل المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^{t}$، بالمصفوفة:

$$(2) \quad W_{t_0}^{t} = \begin{Vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \ldots f_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{Vmatrix},$$

حيث $f_{1k}(t), \ldots, f_{nk}(t)$ هي احداثيات الحل $f_k(t)$ التي تأخذ عند $t = t_0$ قيمة مساوية للشعاع f_k . تسمى المصفوفة (2) مصفوفة ورونسكي Wronski (أو المصفوفة الورونسكية) للجملة (1)، كما يسمى معينها معين ورونسكي (أو المعين الورنسكي) للجملة (1).
كنا اوردنا ضمن 51.13 المصفوفة الورنسكية في حالة مصفوفة ثابتة $A = \| a_{jk} \|$.

بما ان المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ قابل للقلب فإن المصفوفة (2) غير منحلة من اجل كل $t \in [a, b]$ ، والمعين الورونسكي لا ينعدم عند اي $t \in [a, b]$ ؛ وهكذا فإن الحلول $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ المستقلة خطيا عند $t = t_0$ تبقى كذلك من اجل كل $t \in [a, b]$.

أنشيء الحل العام 17.13 (1) بالشعاع الابتدائي (من اجل $t = t_0$) $u = \sum_{k=1}^{n} u_k f_k$ حسب الدستور العام:

$$u(t) = \Omega_{t_0}^t u = \Omega_{t_0}^t \sum_{k=1}^{n} u_k f_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \Omega_{t_0}^t f_k ;$$

وبالتالي فإن كل حل للجملة (1) عبارة خطية من n حلا خاصا: $f_1(t), \ldots, f_n(t)$.

نرى في الحالة الراهنة ان فضاء كل حلول الجملة (1) ذو بعد n وان التوابع الشعاعية $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ تشكل اساسا لهذا الفضاء. تسمى مجموعة التوابع الشعاعية $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ **جملة اساسية من حلول الجملة** (1).

13.37 . حساب المعين الورونسكي. يمكن ان نسمي المعين الورونسكي.

$$[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \ldots f_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) \ldots f_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

بالمقارنة مع الجبر الشعاعي، «الجداء المختلط» للأشعة $f_1(t), \ldots, f_n(t)$. اما عناصر هذا الجداء فهي التوابع القابلة للإشتقاق $f_{jk}(t)$ وبالتالي فهو قابل للإشتقاق. إذا اشتققناه حسب القاعدة 41.7 - س، نجد:

$$\frac{d}{dt}[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = [f_1'(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] +$$
$$+ [f_1(t), f_2'(t), \ldots, f_n(t)] + \ldots + [f_1(t), \ldots, f_n'(t)] =$$
$$= [A(t) f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)] + [f_1(t), A(t) f_2(t), \ldots, f_n(t)] + \ldots$$
$$\ldots + [f_1(t), f_2(t), \ldots, A(t) f_n(t)].$$

إن المركبة الوحيدة التي تعتبر ذات اهمية في الحد ذي الرتبة k في المجموع الموجود هي المركبة وفق الشعاع $f_k(t)$، إذ ان كل مركبة اخرى تؤدي الى معين له عمودان متطابقان وعليه فهو منعدم. اما قيمة المركبة المشار اليها فتساوي $a_{kk}(t) f_k(t)$. نجد في الختام:

$$\frac{d}{dt}[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t))[f_1(t), \ldots, f_n(t)]. \quad (2)$$

يمثل المقدار $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ اثر المصفوفة $A(t)$. بمكاملة المعادلة (2) نجد:

$$[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = [f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0)]\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau} \quad (3)$$

نذكر ان المقدار $\operatorname{tr} A(t)$ لا يتعلق باختيار الاساس $f_1, \ldots, f_n$ (*).

13 .47 . المعادلة ذات الرتبة n . رأينا في 15.13 ان المعادلة:

$$y^{(n)}(t) = a_n(t) y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t) y(t) + b(t) \quad (1)$$

تكافيء الجملة

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = u_2(t), \\ u_2'(t) = u_3(t), \\ \cdots\cdots \\ u_n'(t) = a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t) + \ldots + a_n(t)u_n(t) + b(t), \end{array}\right. \quad (2)$$

حيث:

$$u_1(t) = y(t),\ u_2(t) = y'(t), \ldots, u_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

وهكذا فإن كل شعاع حل $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ يوافق مجموعة توابع $y(t),\ y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$. طبقا لـ 27.13 فإن كل حل $w(t)$ للمعادلة المتجانسة:

$$w^{(n)}(t) = a_n(t) w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t) w_1(t) \quad (3)$$

يمكن وضعه بطريقة وحيدة على الشكل:

$$w(t) = C_1 w_1(t) + \ldots + C_n w_n(t),$$

* راجع مثلاً [14، 35.5]

حيث $w_1(t), \ldots, w_n(t)$ هو الحل الموافق لمصفوفة غير منحلة للمعطيات الابتدائية:

$$\left\| \begin{matrix} w_1(t_0) & \ldots & w_n(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & w_n^{(n-1)}(t_0) \end{matrix} \right\| = W[w_1(t_0), \ldots, w_n(t_0)].$$

تبقى عندئذ مصفوفة الحلول (المصفوفة الورونسكية):

$$\left\| \begin{matrix} w_1(t) & \ldots & w_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^{(n-1)}(t) & \ldots & w_n^{(n-1)}(t) \end{matrix} \right\| = W[w_1(t), \ldots, w_n(t)]$$

غير منحلة من اجل كل $t \in [a, b]$. اما معينها فهو يساوي حسب الدستور 13 .37(3) وبمراعاة الشكل الخاص لمصفوفة الجملة (2):

$$\det W[w_1(t), \ldots, w_n(t)] = \det W[w_1(t_0), \ldots, w_n(t_0)]\, e^{\int_{t_0}^{t} a_n(\tau)d\tau}$$

§ 13 .8 حل معادلة خطية غير متجانسة.

13 .18 . تسمى المعادلة:

$$u'(t) = A(t)\, u(t) + b(t)$$

حيث $b(t) \not\equiv 0$ معادلة خطية غير متجانسة. نلاحظ بطبيعة الحال ان الفرق $v_1(t) - v_2(t)$ لحلين $v_1(t)$ وَ $v_2(t)$ لمعادلة غير متجانسة حل للمعادلة المتجانسة الموافقة لها. وبالتالي إذا كان $v_1(t)$ حلا خاصا للمعادلة غير المتجانسة (الحل المساوي 0 عند $t = t_0$ مثلا) وعرفنا المؤثر $\Omega_{t_0}^t$، فإننا نستطيع الحصول على اي حل للمعادلة غير المتجانسة (الحل المساوي لـِ v_0 عند $t = t_0$ مثلا) بواسطة الدستور:

$$v(t) = v_1(t) + \Omega_{t_0}^t v_0$$

بمعرفة المؤثر $\Omega_{t_0}^t$، يمكننا انشاء الحل $v(t)$ بطريقة تغيير الثابت. نبحث عن $v_1(t)$ بكتابته على النحو:

$$v_1(t) = \Omega_{t_0}^t C(t), \qquad (2)$$

حيث $C(t)$ شعاع متغير مجهول (لو لم يكن $C(t)$ متعلقا بـِ t.

لحصلنا على حل لمعادلة متجانسة، وهو ما يبرر تسمية هذه الطريقة).

للحصول على $v_1(t_0) = 0,$ ننشيء الشعاع $C(t)$ بحيث يكون $C(t_0) = 0.$

من 83.13 ـ ر والتوطئة 31.13 يأتي:

$$v_1'(t) = (\Omega_{t_0}^t)' C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t) = A(t)\, \Omega_{t_0}^t C(t) + \Omega_{t_0}^t C'(t). \quad (3)$$

من جهة اخرى:

$$A(t)\, v_1(t) + b(t) = A(t)\, \Omega_{t_0}^t C(t) + b(t). \quad (4)$$

بجعل طرفي اليمين في (3) وَ (4) متساويين نجد:

$$\Omega_{t_0}^t C'(t) = b(t). \quad (5)$$

نطبق بعد ذلك المؤثر $\Omega_t^{t_0}$، وهو المؤثر العكسي لـ $\Omega_{t_0}^t$ 83.13 ـ د، على طرفي المساواة (5) فنحصل على:

$$C'(t) = \Omega_t^{t_0} b(t),$$

ومنه:

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \Omega_\tau^{t_0} b(\tau)\, d\tau,$$

وهذا باختيار الشعاع الذي ينعدم عند $t = t_0.$

اخيرا نصل الى الدستور:

$$v(t) = \Omega_{t_0}^t \int_{t_0}^{t} \Omega_\tau^{t_0} b(\tau)\, d\tau + \Omega_{t_0}^t v_0 = \Omega_{t_0}^t v_0 + \int_{t_0}^{t} \Omega_\tau^t b(\tau)\, d\tau. \quad (6)$$

يمكننا الآن البرهان على قيام هذه المساواة مباشرة باستخدام قاعدة الاشتقاق 68.9 ـ ب (التي تمتد صلاحيتها بسهولة على التوابع الشعاعية).

28.13 . إذا كان $B = R_1$ وَ $A(t)$ تابعا عدديا، نجد (21.13):

$$\Omega_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau};$$

وبالتالي:

$$v(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau} v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} A(\theta)\, d\theta} b(\tau)\, d\tau. \quad (1)$$

بصفة خاصة، إن كان $A(t) \equiv A$، $A(t)$ فإن:

$$v(t) = e^{(t-t_0)A}v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

38. 13 . إن الدستورين 13 .18(6) وَ 13 .28(1) قائمان أيضا في الحالة العامة التي يكون فيها $u(t)$ تابعا شعاعيا قيمه في فضاء نظيمي B وَ A (t) مؤثرا خطيا في B . اما الرموز الواردة في هذين الدستورين فيجب اعتبارها بمفهوم 13 .31 وَ 13 .91 على التوالي من اجل $A(t) = A$ ثابت ومن اجل A (t) متغير.

بصفة خاصة اذا لم يتعلق المؤثر $A(t) = A$ بـِ t وكان التابع $b(t)$ من الشكل الخاص:

$$b(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)\, e^{Q_k t} b_k,$$

حيث $P_k(t)$ كثير حدود وَ Q_k مؤثر ثابت يتبادل مع المؤثر A وَ b_k اشعة مثبتة من الفضاء B، فإن التكامل 13 .28(2) يمكن حسابه صراحة. في الحالة الراهنة، يمكننا توقع بنية النتيجة بتقدير معاملات غير معينة؛ ولذا نستطيع البحث عن الحل بطريقة المعاملات غير المعينة.

48. 13 . نعتبر حالة الفضاء ذي n بعداً $B = R_n$. يعطي هنا المؤثر الحال $\Omega_{t_0}^{t}$ بالمصفوفة الورونسكية 13 .27:

$$\Omega_{t_0}^{t} = \begin{Vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{Vmatrix}$$

نبحث عن الحل من الشكل 13 .18(2)؛ يمكن ان نكتب في الحالة المعتبرة:

$$v_{1j}(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t)\, C_k(t),$$

حيث $C_1(t), \dots, C_n(t)$ توابع يجب تعيينها. تأخذ المعادلة 13 .18(5) شكل الجملة:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(t)\, C'_k(t) = b_k(t).$$

بحل هذه الجملة بالنسبة لـِ $C'_k(t)$ ثم بالمكاملة من t_0 الى t فإننا

نحصل على الكميات المطلوبة $C_k(t)$.

58. 13 . نعتبر المعادلة من الرتبة n :

$$y^{(n)}(t) = a_n(t)\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\, y(t) + b(t).$$

يأخذ المؤثر الحال للجملة المكافئة

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= u_3(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n'(t) &= a_1(t)\, u_1(t) + \ldots + a_n(t)\, u_n(t), \end{aligned}$$

حيث $u_1(t) = y(t)$، $u_2(t) = y'(t), \ldots$، $u_n(t) = y^{(n-1)}(t)$، يأخذ الشكل:

$$\Omega_{t_0}^{t} = \begin{Vmatrix} w_1(t) & \ldots & w_n(t) \\ w_1'(t) & \ldots & w_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{(n-1)}(t) & \ldots & w_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix}$$

حيث $w_1(t), \ldots, w_n(t)$ حلول موافقة لمصفوفة غير منحلة من المعطيات الابتدائية. نبحث عن الحل على الشكل 13 .18(2)، أي ان لدينا (فيما يخص السطر الاول):

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t)\, C_k(t).$$

تأخذ المعادلات 13 .18(5) في الحالة الراهنة الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} w_k(t)\, C_k'(t) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} w_k'(t)\, C_k'(t) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum_{k=1}^{n} w_k^{(n-1)}(t)\, C_k'(t) = b(t). \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات بالنسبة لـ $C_k'(t)$ وبالمكاملة من t_0 الى t نحصل على التوابع $C_k(t)$، ومنه يأتي الحل المطلوب $v(t)$.

تمارين

1 . لدينا حلان مختلفان $y = 0$ وَ $y = x^3$ لنفس المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, بنفس الشرط الابتدائي $y(0) = 0$. هل هناك تناقض بين ذلك والنظرية الوحدانية 53.13 ؟

2 . ننزلق نقطة ذات وزن بدون احتكاك على طول منحن. عين هذا المنحنى لكي تكون ازاحة مسقط هذه النقطة على المستقيم الافقي منتظمة (السؤال أ) .ب) نفس السؤال عندما نريد أن تكون تلك الازاحة منتظمة على المستقيم العمودي.

3 . نعرف حلا خاصا $u_1(t)$ لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية:

$$u''(t) + a(t)\,u'(t) + b(t)\,u(t) = 0$$

كيف نجد حلا ثانيا مستقلا خطيا عن الاول؟

4 . طبقا لـِ 71.13 فإن كل معادلة خطية من الرتبة n ذات معاملات ثابتة تكافيء جملة من الرتبة الاولى مصفوفتها تقبل كثير حدود اصغريا درجته n . اثبت ان كل جملة n معادلة من الرتبة الاولى تتمتع بهذه الخاصية تكافيء معادلة من الرتبة n .

5 . لتكن $u'(t) = A(t)\,u(t)$ معادلة شعاعية $(u(t) \in R_n)$ وَ $A(t)$ مؤثرا دوريا دورته T (أي $A(t+T) = A(t)$). اثبت ان $\Omega_0^{t+T} = C\Omega_0^t$ ، حيث C مؤثر ثابت.

6 . لتكن $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ تابعا مستقلا خطيا قيمها في الفضاء R_N قابلة للإشتقاق من اجل كل $t \in [a, b]$. ، حيث $n \leqslant N$. اثبت وجود معادلة $u'(t) = A(t)\,u(t)$ بمؤثر مستمر $A(t)$ في R_N تقبل هذه التوابع الشعاعية كحلول لها.

7 . لتكن $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ n تابعا سلمياً مستقلة خطيا وتقبل الاشتقاق n مرة. هل يمكن ان يكون معينها الورونسكي مطابقا للصفر؟

8 . لتكن $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ n تابعا سلميا مستقلة خطيا وقابلة للإشتقاق n مرة، معينها الورونسكي غير منعدم. انشيء معادلة من الرتبة n تقبل $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ كحلول لها.

9 . إذا كان للتابعين $A(t)$ وَ $b(t)$ مشتقات مستمرة بما في ذلك المشتق من الرتبة m ، فإن للمعادلة الخطية.

$$u'(t) = A(t)\, u(t) + b(t)$$

مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة $(m+1)$.

10 . إذا كان $y(0) = 0$ وتحققت المتراجحة $y'(t) - ky(t) \leqslant \varphi(t)$ من اجل $0 \leqslant t \leqslant T$ ، فإن المتراجحة:

$$y(t) \leqslant \int_0^t e^{-k(t-s)} \varphi(s)\, ds$$

محققة ايضا من اجل $0 \leqslant t \leqslant T$.

11 . (تتمة) إذا تحققت المتراجحة:

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + k \int_0^t w(s)\, ds$$

من اجل $0 \leqslant t \leqslant T$, فإن الأمر كذلك فيما يخص المتراجحة:

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + k \int_0^t \varphi(s)\, e^{k(t-s)}\, ds.$$

12 . (تتمة) نقول عن تابع $y(t) \in X$ على $[0, T]$ انه ε - حل تقريبا للمعادلة: $u'(t) = f(t, u)$ إذا كان:

$$\| y'(t) - f(t, y(t)) \| \leqslant \varepsilon$$

على $[0, T]$. اثبت ان لدينا المتراجحة التالية من اجل كل حل $u(t)$ وكل ε - حل تقريبا:

$$\| u(t) - y(t) \| \leqslant \| u(0) + v(0) \| e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k} [e^{kt} - 1],$$

حيث k هو الثابت الوارد في شرط ليبشيتز للتابع $f(t, u)$.

13 . (تتمة) نعتبر المعادلة

$$u'(t) = A(t)\, u(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

بمؤثر مستمر معطى $A(t)$. ليكن:

$$\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}.$$

نعرف تابعا شعاعيا مستمرا $y_\Pi(t)$ كما يلي:

$$y_\Pi(0) = y_0;$$

$$y_\Pi(t_{k+1}) = y_\Pi(t_k) + A(t_k)\, y_\Pi(t_k)\, \Delta t_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

إن $y_\Pi(t)$ من الدرجة الاولى من اجل $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، انشيء تجزئة Π بحيث يصبح التابع $y_\Pi(t)$ حلا تقريبا ε- للمعادلة (1).

14 . (تتمة) اثبت ان هناك حلا للمعادلة (1) (التمرين 13) معطى بالعبارة

$$u(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} y_\Pi(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \Big\{ \prod_{k=n-1}^{0} (E + A(t_k)\, \Delta t_k) \Big\} u_0$$

(نلاحظ ان ترتيب العوال له اهميته!).

15 . عرف، ضمن فرض التمرين 13، تابعا شعاعيا مستمرا $z_\Pi(t)$ وفق القاعدة:

$$z_\Pi(0) = y_0;$$

$$z_\Pi(t_{k+1}) = \Big\{ \prod_{j=k}^{0} e^{A(t_j)\Delta t_j} \Big\} y_0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، انشيء تجزئة Π بحيث يصبح التابع $z_\Pi(t)$ حلا تقريباً للمعادلة (1).

16 . اثبت ان هناك حلا للمعادلة (1) (التمرين 13) معطى بالعبارة:

$$u(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} z_\Pi(T) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \Big\{ \prod_{j=n-1}^{0} e^{A(t_j)\Delta t_j} \Big\} u_0$$

(نلاحظ ان ترتيب العوامل له اهميته!).

نبذة تاريخية

ظهرت بعض المعادلات التفاضلية في الرياضيات منذ اكتشاف الحساب التفاضلي والتكاملي، اي منذ اعمال نيوتن وليبنيتز، كامل ليبنيتز سنة 1693 المعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الاولى. ووجد اولر (1739) حل المعادلة الخطية، متجانسة أو غير متجانسة، من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة. اما طريقة تغير الثابت فقد شيدها لاغرانج (1775)؛ مع العلم ان أولر كان قد حل العديد من المساى باستخدام هذه الطريقة وذلك منذ 1739.

حققت نظرية المعادلات التفاضلية خلال القرن 18 تقدما حاسما في الميكانيكا العادية وميكانيكا الفضاء ونظرية المد والجزر في البحار وكذا الارصاد الجوي وميادين اخرى في الفيزياء.

كانت النجاحات التي سجلتها نظرية المعادلات التفاضلية قد كيفت النتيجة الفلسفية في طابعها الشمولي، وهو ما يسمى « مبدأ الحتمية الميكانيكية » الذي تعبر عليه الكلمة التوجيهية التي تتصدر هذا الفصل. لعبت هذه النتيجة، وقتئذ، بابرازها الانتصار النهائي للعقل لعبت دورا كبيرا في تحرير العلم من التأثيرات اللاهوتية والذهنيات المتجمدة. ورغم ذلك، اثبتت نجاحات الفيزياء في القرن 20 ضيق الحتمية الميكانيكية التي تخلت في الميادين الفيزيائية المتقدمة عن مكانها لتحتله الحتمية الاحصائية، هذا مع احتفاظ الحتمية الميكانيكية بقيمتها في المسائل الميكانيكية.

ادخل ورونسكي، الرياضي والفيلسوف، معينة الخاص بالمشتقات سنة 1812.

طرحت المسألة العامة للوجود والوحدانية لحل معادلة تفاضلية في اعمال القرن 19 وجاء بأول برهان لوجود الحل كوشى (1844)؛ ثم اختصره ليبشيتز اختصارا كبيرا وصاغ الشرط الذي يحمل اسمه. قدم بيكار (1890) طريقة التقريبات المتوالية، وقام باناخ سنة 1922 بوضع هذه الطريقة في قالب مجرد من اجل فضاء متري باستخدام صريح لمؤثر مقلص.

الفصل 14

النشور المتعامدة

لا تمثل نظرية فوريي نتيجـة مـن اجل نتائج التحليل الحديث فحسب بل تمثل ايضا اداة ضرورية لدراسة اغلب المسائل الرئيسية في الفيزياء الحديثة.

و. تومسن وَ ب. ج. ثايت «فلسفة طبيعة (1867)»

W. Thomson, P.G .Tait

§ 14 .1 . النشور المتعامدة في فضاء هيلبرتي

14 .11 . طرح المسألة. انشغلنا في §12 .5 بالتقريبات المنتظمة في الفضاء $C(Q)$ المؤلف من التوابع المستمرة، اي التقريبات بالنسبة للنظيم:

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|. \quad (1)$$

يهتم العديد من المسائل في التحليل باعتبار التقريبات بمفوم المتوسط التكاملي، أي بالنسبة للنظيم:

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_Q |f(x)|^p\, dx}, \quad (2)$$

يمثل Q في هذا الفصل مجالا مغلقا من المحور الحقيقي.

ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في جملة (خطية) معطاة $B(Q)$ تتألف من توابع $\varphi(x)$ لكي نستطيع، من اجل كل تابع $f(x)$ (مستمر أو على الاقل مستمر بتقطع، وهو ما يضمن وجود التكاملات التي نحتاج اليها) ان نشير لمتتالية $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ توابع من $B(Q)$ بحيث:

$$\| f-Q_n\|_2 = \sqrt{\int_Q |f(x)-\varphi_n(x)|^2\ dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (4)$$

إذا تقاربت متتالية $f(x)$ بانتظام نحو $Q_n(x)$ فإن العلاقة (4)

قائمة بطبيعة الحال. لكن التقارب المنتظم لا تستوجبه العلاقة (4) بل ان هذه العلاقة لا تستلزم حتى التقارب البسيط. يمكننا إذن القول بأن مسألة التقاربات بمفهوم المتوسط التربيعي «ايسر» من مسألة التقريبات المنتظمة. زيادة على ذلك فإن انشاء تقريبات من النمط الاول يمكن وضعه في شكل هندسي واضح وهذا لكون فضاء التوابع الموافق لذلك، بالنظيم (3)، فضاء هيلبرتي حيث نستطيع قياس اطوال الاشعة كما هو الحال في فضاء نظيمي ونستطيع بجانب ذلك استخدام خاصية التعامد.

21. 14 . التقريبات في فضاء هيلبرتي. ليكن H فضاء هيلبرتيا حقيقيا أو عقديا. وليكن $B \subset \mathrm{H}$ الفضاء الجزئي، الذي بعده n، المؤلف من جملة متعامدة ومتجانسة $e_1, \ldots, e_n$ (بحيث $(e_j, e_k) = 1$ عندما $j = k$ وَ $(e_j, e_k) = 0$ عندما $j \neq k$). نضع المسألة التالية: من اجل شعاع $f \in \mathrm{H}$ معطى، نبحث عن شعاع $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in B$ بحيث يكون المقدار: $\| f - y \|$ اصغر مقدار ممكن. نفرض في حل هذه المسألة ان الفضاء H عقدي؛ إن كان حقيقيا فما علينا الآ اجراء بعض الاختصارات في الرموز. من اجل كل $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$، لدينا:

$$\| f - x \|^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k) =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{(f, e_k)} - \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k (f, e_k) + \sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_{k=1}^{n} [| (f, e_k) |^2 - \xi_k \overline{(f, e_k)} - \bar{\xi}_k (f, e_k) + | \xi_k |^2] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} | (f, e_k) |^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_{k=1}^{n} [(f, e_k) - \xi_k] [\overline{(f, e_k) - \xi_k}] - \sum_{k=1}^{n} | (f, e_k) |^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_{k=1}^{n} | (f, e_k) - \xi_k |^2 - \sum_{k=1}^{n} | (f, e_k) |^2. \quad (1)$$

من الواضح ان العبارة المحصل عليها اصغرية إن كان $\xi_k = (f, e_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. يسمى الشعاع $y = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$ مسقط الشعاع

f على الفضاء الجزئي B، حيث يمثل الشعاع $f - y = h$ لعمود المسقط من طرف الشعاع f على الفضاء الجزئي B ؛ تنطبق هذه التعاريف في الحالة الحقيقية مع المفاهيم الهندسية الموافقة لها (الرسم 1.14). نرى من خلال (1) ان مربع طول الشعاع h هو:

$$\|h\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2.$$

ومنه تأتي بصفة خاصة متراجحة بيسل (Bessel):

$$\sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad (2)$$

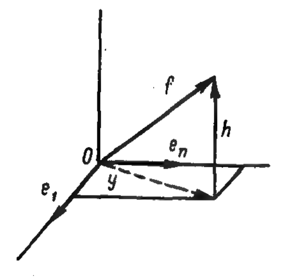
القائمة من اجل كل شعاع $f \in H$ وكل جملة متعامدة ومتجانسة

$$e_1, \ldots, e_n.$$

نرى في الختام ان احسن تقريب «هيلبرتي» للشعاع f باشعة الفضاء الجزئي B ينجز عندما نختار كشعاع مقارب y مسقط الشعاع f على الفضاء الجزئي B.

31.14 . نعتبر الآن جملة متعامدة ومتجانسة غير منتهية $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. يمكن القيام بالإنشاء الوارد اعلاه من اجل كل جماعة منتهية $e_1, \ldots, e_n$ والحصول على احسن تقريب هيلبرتي الموافق لذلك $y_n = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$. نشير الى ان المعاملات (f, e_k) المتعلقة باحسن تقريب لا تتعلق بالرقم $n \geqslant k$. اما الانحراف h_n فيساوي، كما رأينا:

$$\|h_n\| = \sqrt{(f, f) - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2}. \qquad (1)$$



الرسم 1.14

السؤال المطروح هو: هل يمكن جعل الكمية $\| h_n \|$ صغيرة بالقدر الذي نريد وهذا باختيار n كبير بكفاية؟ لا يمكن أن يتحقق ذلك في الحالة العامة: مثلا، إذ كانت جملة $e_1, e_2, \ldots$ «غير تامة» أي إذا وجد شعاع f غير منعدم ومتعامد على كل الاشعة $e_1, e_2, \ldots$ فإن كل الاعداد (f, e_k) منعدمة وكل الاعداد $\| h_n \|$ تساوي $\| f \|$.

14 .41 أ. على الرغم من ذلك فإننا نستطيع ضمن بعض الشروط القول بأن الاعداد $\| h_n \|$ تؤول الى الصفر عندما يؤول n الى ∞. يتحقق ذلك إذا علمنا، انطلاقا من بعض الاعتبارات الاضافية (مثلا، من نظريات من نمط ستون Stone (25. 12) في بعض الفضاءات التابعية) انه من الممكن اختيار من بين العبارات الخطية للأشعة $e_1, e_2, \ldots,$ متتالية متقاربة (بالنسبة للنظيم الهيلبرتي) نحو الشعاع f. ذلك انه إذا كانت لدينا المتراجحة $\| f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \| \leqslant \varepsilon,$ من اجل عبارة خطية $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ فإن لدينا بالضرورة فيما يخص احسن تقريب هيلبرتي $\sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$:

$$\| h_n \| = \sqrt{\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2} = \| f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k \| \leqslant \varepsilon. \quad (1)$$

ب. ضمن الفرض أ، نحصل على المساواة التالية بالإنتقال الى النهاية $\varepsilon \to 0$:

$$f = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k. \quad (2)$$

تسمى السلسلة الواردة في الطرف الاخير سلسلة فوريي للشعاع f وفق الجملة المتعامدة والمتجانسة $e_1, e_2, \ldots$. تسمى الاعداد (f, e_k) **معاملات فوريي** للشعاع f وفق الجملة e_k. هذه التسميات صالحة بغض النظر عن طبيعة السلسلة؛ إن كانت سلسلة فوريي متباعدة فإننا نعتبرها الآن بصفة شكلية.

ج. في حالة تقارب السلسلة (2) نحو الشعاع f، نجد بالإنتقال الى النهاية في (1) ان:

$$(3) \qquad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2.$$

تمثل هذه المساواة نتيجة مماثلة لنظرية فيثاغورس في حالة البعد غير المنتهي، وتسمى **مساواة بارسڤال** (Parseval). إذا عجزنا عن اثبات تقارب سلسلة فوريي نحو الشعاع f فإن لدينا دوما المتراجحة:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2$$

التي تستخلص، بالانتقال الى النهاية في متراجحة بيسل 14 .21(2) وتسمى هي الاخرى متراجحة بيسل.

د. نلاحظ اخيرا انه إذا تقاربت سلسلة فوريي لشعاع f نحو f

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k,$$

فإن الامر كذلك بعد كل تبديل للحدود يضع الحد من الرتبة k في الرتبة n_k ($k = 1, 2, \ldots$):

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_{n_k}) e_{n_k}.$$

ذلك ان لدينا حسب (1):

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} (f, e_{n_k}) e_{n_k}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |(f, e_{n_k})|^2.$$

تؤول الكمية الاخيرة نحو الصفر عندما يؤول N الى ∞ وذلك حسب (3) وشرعية تغيير ترتيب الحدود في سلسلة متقاربة حدودها موجبة (6 .63).

14 .51. من الضروري ان تظهر سلاسل فوريي في مسائل التقريبات لأن لدينا الخاصية التالية:

توطئة. نفرض أن لدينا، من اجل شعاع $f \in H$ وجملة متعامدة ومتجانسة $\{e_k\}$ في H، نشراً:

$$f = \sum_{1}^{\infty} c_k e_k,$$

اي ان

$$\lim_{p \to \infty} \|f - \sum_{k=1}^{n_p} c_k e_k\| = 0$$

على الاقل من اجل متتالية $\ldots < n_p < \ldots < n_2 < n_1$ ، عندئذ يكون كل معامل c_m مساوياً لمعامل فوريي (f, e_m) ، $(m = 1, 2, \ldots)$، وتكون السلسلة (1) متقاربة بالنظيم بالمفهوم المعتاد.

البرهان. بضرب (1) سلميا في e_m وباستعمال استمرار الجداء السلمي (34.12 ـ ب) وكون الجملة $\{e_k\}$ متعامدة ومتجانسة نحصل على:

$$(f, e_m) = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} c_k e_k, e_m\right) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_1^{n_p} c_k e_k, e_m\right) = c_m,$$

وهو المطلوب.

61.14 . توطئة. ليكن:
$$f = \sum_1^\infty a_k e_k, \quad g = \sum_1^\infty b_k e_k$$

نشرين (بالمفهوم الوارد في 51.14)، $\{e_k\}$ جملة متعامدة ومتجانسة؛ إن السلسلة $\sum_1^\infty a_k b_k$ متقاربة مطلقاً ولدينا:

$$\sum_1^\infty a_k \overline{b}_k = (f, g). \qquad (1)$$

البرهان. يأتي التقارب المطلق للسلسلة في الطرف الايسر من (1) من المتراجحة:

$$|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

وهذا بفضل 41.14(4). ثم إذا كان

$$f = \lim_{p\to\infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \quad g = \lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k$$

بالنظيم في الفضاء H وكان $l_p = \min(m_p, n_p)$ فإن لدينا بفضل استمرار الجداء السلمي:

$$(f, g) = \left(\lim_{p\to\infty} \sum_1^{m_p} a_k e_k, \lim_{p\to\infty} \sum_1^{n_p} b_k e_k\right) =$$
$$= \lim_{p\to\infty} \sum_1^{l_p} a_k \overline{b}_k = \sum_1^\infty a_k \overline{b}_k.$$

71.14 . نكتب، قصد استعمالها مستقبلا، سلسلة فوريي ومتراجحة

بارسفال في حالة جملة متعامدة وغير متجانسة $g_1, g_2, \ldots$. إذا كان الشعاع g_n غير منعدم من اجل كل n فإن الجملة $e_n = g_n/\| g_n \|$ متعامدة ومتجانسة. يمكن كتابة سلسلة فوريي لشعاع f وفق الجملة e_n كما يلي.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f, \frac{g_k}{\| g_k \|}\right) \frac{g_k}{\| g_k \|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, g_k)}{\| g_k \|^2} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k, \tag{1}$$

حيث

$$\alpha_k = \frac{(f, g_k)}{\| g_k \|^2}. \tag{2}$$

تسمى السلسلة الواردة في الطرف الاخير من (1) **سلسلة فوريي الشعاع** f **وفق الجملة** g_n ، وتمثل الاعداد α_k **معاملات فوريي الشعاع** f **وفق الجملة** g_n . إذا تقاربت السلسلة (1) نحو f فإن لدينا:

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | (f, e_k) |^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{g_k}{\| g_k \|^2}\right) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{| (f, g_k) |^2}{\| g_k \|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \| g_k \|^2 \alpha_k^2,$$

وهو ما يمثل **مساواة بارسفال** للجملة g_n . وبذلك تصبح المساواة 61. 14(1):

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k \| g_k \|^2 \tag{3}$$

وهذا بافتراض ان:

$$f = \sum_{1}^{\infty} \alpha_k g_k, \quad g = \sum_{1}^{\infty} \beta_k g_k.$$

§ 14 .2 . سلاسل فوريي التقليدي.

12. 14 . نعتبر في الفضاء الهيلبرتي الحقيقي $H_R [-\pi, \pi]$ (84. 12 - د) المؤلف من التوابع $f(t)$ المستمرة بتقطع على المجال $[-\pi, \pi]$ أو، وهذا يعني الامر نفسه، على الدائرة

$$Q = \{(x, y) : x = \cos t, \ y = \sin t\}.$$

نعتبر الجملة المتعامدة غير المنتهية.

$$(1)\quad 1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \ldots$$

يتضح تعامد هذه الجملة مباشرة بحساب تكاملات التوابع: $\cos kt \cdot \cos mt$ ، $\cos kt \cdot \sin mt$ ، $\sin kt \cdot \sin mt$ على المجال $[-\pi, \pi]$.

لجعل هذه الجملة، متجانسة نلاحظ أن $\| 1 \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dt = 2\pi$

ومن 55.9 ـ ج يأتي:

$$\| \cos kt \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt\, dt = \pi,$$

$$\| \sin kt \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt\, dt = \pi.$$

وبالتالي تكتب سلسلة فوريي 71.14 (1) عندما يكون لدينا تابع $f(t) \in H_R[-\pi, \pi]$ على الشكل:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau + \cos t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos \tau\, d\tau +$$

$$+ \sin t \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin \tau\, d\tau + \ldots =$$

$$(2)\qquad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

حيث:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau\, d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

تسمى الاعداد a_n وَ b_n **معاملات فوريي** التابع $f(t)$ وفق الجملة

(1) المؤلفة من توابع مثلثية. سنناقش مسألة تقارب سلسلة فوريي (2) بعد قليل (42.14).

22.14 . ننتقل الآن الى سلسلة مثلثية لفوريي في الشكل العقدي. نعتبر الفضاء الهيلبرتي العقدي $H_C[-\pi, \pi]$ المؤلف من التوابع العقدية المستمرة بتقطع على المجال $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ (84.12 ـ ر). لدينا هنا جملة متعامدة غير منتهية مؤلفة من التوابع:

$$e^{int} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

يأتي تعامد هذه الجملة من المساواة البديهية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq m).$$

نحسب نظيم التابع :

$$\| e^{int} \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} | e^{int} |^2\, dt} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt} = \sqrt{2\pi}.$$

من اجل تابع معطى $f(t) \in H_C[-\pi, \pi]$. فإن سلسلة فوريي

71.14 (1) تأخذ شكل سلسلة ثنائية الجانب (84.6):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{2}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, e^{-in\tau}\, d\tau \tag{3}$$

تمثل معاملات فوريي التابع $f(t)$ وفق الجملة (1).

32.14 . باستخدام دستور اولر:

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

يمكننا وضع السلسلة 22.14 (2) على الشكل 12.14 (2) (كتبنا اعلاه السلسلة 12.14 (2) من اجل التوابع الحقيقية فقط).

نضع :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = (c_n + c_{-n}) \cos nt + i\,(c_n - c_{-n}) \sin nt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau \cdot \cos nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau\, d\tau \cdot \sin nt =$$

$$= a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

نلاحظ، من اجل كل n، ان المجموع الجزئي $\sum_{0}^{n}$ للسلسلة 14 .12(2) والمجموع الجزئي المتناظر $\sum_{-n}^{n}$ لـِ 14 .22(2) متطابقان. وبالتالي فإن تقارب السلسلة 14 .12(2) يكافيء قابلية الجمع المتناظر للسلسلة 14 .22(2). نشير، كما فعلنا في 6 .94، ان قابلية الجمع المتناظر للسلسلة 14 .22(2) يمكن ان تتحقق من اجل كل $t \in R_1$ بدون ان تكون السلسلة متقاربة (مفهوم وجود $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} \sum_{-m}^{n}$).

14 .42 . نظرية. إن سلسلة فوريي 14 .22(2) لكل تابع (عقدي) مستمر بتقطع على المتراص $Q = [-\pi, \pi] = \{x^2 + y^2 = 1\}$ متقاربة نحو $f(t)$ بنظيم الفضاء $H_C(Q)$ مهما كان ترتيب حدودها.

البرهان. بمراعاة النتيجة 14 .41 ـ أ يكفي اثبات وجود متتالية $T_n(t)$ من كثيرات الحدود المثلثية المتقاربة نحو $f(t)$ بنظيم الفضاء $H_C(Q)$

نعتبر كثيرات الحدود المثلثية:

$$T_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau;\ t)\, f(\tau)\, d\tau,$$

حيث $D_n(\tau;\ t)$ متتالية ذات الشكل دلتا الواردة في 12 .75 ـ أ. إن كثيرات الحدود $T_n(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على كل مجموعة مغلقة $E \subset Q$ من نقاط استمرار التابع $f(t)$ وهذا حسب النظرية 12 .75 ـ ج. تبقى كثيرات الحدود $T_n(t)$ محدودة بالطويلة على كل Q بالعدد $M = \sup |f(t)|$. من اجل $\varepsilon > 0$ معطى فإن المجموعة المنتهية من نقاط تقطع التابع $f(t)$ يمكن تغطيتها بمجموعة مفتوحة U هي اتحاد لعدد منته من المجالات مجموع اطوالها اصغر من ε^2. إن التابع

$f(t)$ مستمر على المجموعة المغلقة $Q - U$. نبحث عن عدد n بحيث يكون $\varepsilon > |f(t) - T_n(t)|$ على $Q - U$. عندئذ

$$\|f(t)-T_n(t)\|^2=\int_Q |f(t)-T_n(t)|^2\,dt=$$

$$=\int_U |f(t)-T_n(t)|^2\,dt+\int_{Q-U}|f(t)-T_n(t)|^2\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 4M^2\varepsilon^2+4\pi^2\varepsilon^2=4\varepsilon^2(M^2+\pi^2),$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t)=f(t)$$

وهذا في $H_C(Q)$، وهو المطلوب.

يتبين مما قلناه اعلاه ان لدينا النتيجة المماثلة للسابقة من اجل كل تابع حقيقي مستمر بتقطع $f(t)$ باعتبار سلسلة فوريي 14 .12(2).

52. 14 . نحصل من ثَمّ على مساواة بارسفال من اجل كل تابع $f(t)$ مستمر بتقطع: في الحالة الحقيقية،

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt=\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_1^{\infty}(a_k^2+b_k^2), \tag{1}$$

وهذا حسب الدستورين 14 .71 وَ 14 .12؛ اما في الحالة العقدية،

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{2}$$

وهذا حسب الدستورين 14 .71 وَ 14 .22.

نرى، إذا كان $f(t)$ وَ $g(t)$ تابعين مستمرين بتقطع، ان لدينا في الحالة الحقيقية، حسب 14 .71(3)، التي يكون فيها:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

$$g(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_1^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt),$$

المساواة:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt=\pi\frac{a_0c_0}{2}+\pi\sum_1^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n), \tag{3}$$

اما في الحالة العقدية التي يكون فيها:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int},\quad g(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{int},$$

فلدينا:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_n}. \tag{4}$$

62. 14 . نستنتج من النظرية 14 .42 والعلاقتين 14 . 52(1) - (2) بصفة خاصة النتائج التالية:

أ . نتيجة. إن معاملات فوريي a_n وَ b_n لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ تؤول الى 0 من اجل $n\to\infty$، وتؤول المعاملات c_n الى 0 من اجل $n\to\pm\infty$.

ب . نتيجة. إذا كانت كل معاملات فوريي 14 .12(3) (أو 14 .22(3)) لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ منعدمة، فإن $f(t)$ منعدم اينما كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط (9 .61 - ر).

ج . نتيجة. إذا كان تابعان مستمران بتقطع $f(t)$ وَ $g(t)$ لهما معاملات فوريي 14 .12(3) أو 14 .22(3) متساوية على التوالي فإنهما متطبقان اينما كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط.

د . نتيجة. إن الجملة المتعامدة 14 .12(1) المؤلفة من التوابع المثلثية جملة تامة: كل تابع مستمر بتقطع $f(t)$ متعامد على كل توابع الجملة 14 .12(1) يمثل صفر الفضاء $H_R(Q)$، أي انه منعدم اينما كان باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط. الامر كذلك فيما يخص جملة التوابع e^{int} (14 .22 .(1)) في الفضاء $H_C(Q)$.

72. 14 أ . **توطئة.** إذا تقاربت سلسلة مثلثية $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ نحو تابع $s(t)$ بانتظام على $[-\pi,\pi]$، بمفهوم ان من اجل متتاليتين $m_p\to\infty$ وَ $n_p\to\infty$، لدينا:

$$s(t)=\lim_{p\to\infty}\sum_{-m_p}^{n_p} c_k e^{ikt}$$

بانتظام على $[-\pi, \pi]$ ، فإن الاعداد c_k تتطابق مع معاملات فوريي للتابع $s(t)$.

هذه النتيجة بديهية لأن التابع $s(t)$ مستمر والتقارب المنتظم يستلزم التقارب بنظيم $H_C(Q)$ ، وهذا ما يسمح بتطبيق 51.14 .

ب . نتيجة . إذا كانت c_n $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ معاملات فوريي لتابع مستمر بتقطع $f(t)$ وكانت السلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ متقاربة بانتظام نحو تابع $s(t)$ بالمفهوم الوارد في أ ، فإن $s(t) \equiv f(t)$ اينما كان ، باستثناء ممكن لعدد منته من النقاط .

ذلك ان التابع $s(t)$ مستمر والاعداد c_n هي ، بفضل أ ، معاملات فوريي ؛ ثم إن هذه الاعداد نفسها هي ، فرضا ، معاملات فوريي التابع $f(t)$. يؤدي تطبيق النتيجة 62.14 ـ ج الى النتيجة المطلوبة .

§ 3.14 . تقارب سلسلة فوريي عند نقطة وعلى مجموعة .

13.14 . تقارب سلسلة فوريي عند نقطة . رأينا في 42.14 ان سلسلة فوريي تسمح بالحصول على تقريب لا محدود لتابع مستمر بتقطع معطي $f(t)$ بمفهوم المتوسط التربيعي . نريد ان نعرف إن كانت سلسلة فوريي تسمح بالحصول على تقريب لا محدود لقيمة التابع $f(t)$ عند نقطة معطاة $t = t_0$ ؛ إن كانت سلسلة فوريي متقاربة عند $t = t_0$ نحو العدد $f(t_0)$ بالمفهوم المعتاد .

نعبر من اجل ذلك سلسلة فوريي في شكلها العقدي 212.14 (2) .

ليكن :

$$s_{m,n} = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ikt}$$

مجموعا جزئيا لسلسلة فوريي لتابع $f(t)$ ، من اجل عددين $m > 0$ ، $n > 0$. لدينا :

$$s_{m,n}(t) = \sum_{-m}^{n} c_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \cdot e^{ikt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{-m}^{n} e^{ik(t-\tau)} d\tau .$$

نجمع المتوالية الهندسية فنحصل على:

$$\sum_{-m}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{-im\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}}{2i \sin\frac{\theta}{2}},$$

إذن:

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)}}{\sin\frac{t-\tau}{2}} d\tau =$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h) \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}} dh.$$

إذا وضعنا $f(t) \equiv 1$ فإن لدينا $s_{m,n}(t) \equiv f(t)$ من اجل كل $m > 0$ و $n > 0$. يعطي الدستور (1):

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}} dh = 1.$$

يأخذ الآن الفرق $s_{m,n}(t) - f(t)$ الشكل:

$$s_{m,n}(t) - f(t) =$$

$$(2) \qquad = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t+h) - f(t)\} \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}} dh.$$

ما هي الشروط التي تجعل $s_{m,n}(t)$ تؤول الى $f(t)$ أي الشروط التي تجعل التكامل (2) يؤول الى الصفر.

23. 14 . توطئة. إذا كان $\varphi(h)$ تابعا قيمة عقدية معرفا في المجال $a < x \leqslant b$ ومحدودا ومستمرا بتقطع على كل مجال $[a+\delta, b]$، $\delta > 0$، وقابلا للمكاملة مطلقا بالمفهوم الموسع على $[a, b]$ ، فإن التكاملات:

$$\int_a^b \varphi(h) \sin \nu h \, dh, \qquad \int_a^b \varphi(h) \cos \nu h \, dh, \qquad \int_a^b \varphi(h) e^{i\nu h} dh$$

تؤول الى الصفر عندما $\nu \to \pm\infty$

البرهان. بمراعاة الدستورين:

$$\nu h = \frac{1}{2i}\left(e^{i\nu h} - e^{-i\nu h}\right) \qquad \text{و} \qquad \nu h = \frac{1}{2}\left(e^{i\nu h} + e^{-i\nu h}\right)$$

يكفي اعتبار التكامل الاخير. نعالج في البداية الحالة التي يكون فيها التابع $\varphi(h)$ مستمرا على المجال $[a, b]$. عندما نثبّت ν فليس هناك على هذا المجال سوى عدد منته من نقاط المتوالية الحسابية:

$$a + k\frac{2\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

نرمز لها بـ $h_0 = a < h_1 < \ldots < h_m$. نفرض ان التابع $g(h)$ يساوي $\varphi(h_0)$ في المجال $[h_0, h_1)$ و $\varphi(h_1)$ ، في $[h_1, h_2)$ ، الخ.، اخيرا $\varphi(h_m)$ في المجال $[h_m, b)$. من الواضح ان:

$$|g(h) - \varphi(h)| \leqslant \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) \tag{1}$$

اينما كان على $[a, b]$ ، حيث يرمز $\omega_\varphi(\delta)$ لتذبذب التابع $\varphi(x)$ على $[a, b]$ (71.5 ـ ج). بما ان المجال $[h_j, h_{j+1}]$ دورة للتابع $e^{i\nu h}$ فإن:

$$\int_{h_j}^{h_{j+1}} g(h)\, e^{i\nu h}\, dh = \varphi(h_j) \int_{h_j}^{h_{j+1}} e^{i\nu h}\, dh = 0;$$

إذن:

$$\left|\int_a^b g(h)\, e^{i\nu h}\, dh\right| = \left|\int_{h_m}^b g(m)\, e^{i\nu h}\, dh\right| \leqslant M\cdot\frac{2\pi}{\nu}, \tag{2}$$

حيث $M = \max|\varphi(h)|$. ينتج من (1) وَ (2) ان:

$$\left|\int_a^b \varphi(h)\, e^{i\nu h}\, dh\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(h) - g(h)|\, dh + \left|\int_a^b g(h)\, e^{i\nu h}\, dh\right| \leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant \omega_\varphi\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b-a) + M\frac{2\pi}{\nu}.$$

بما ان الكمية $\omega\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$ تؤول، بفصل استمرار $\varphi(h)$ ، الى الصفر عندما $\nu \to \infty$، فإن التقدير (3) يثبت التوطئة في الحالة المعتبرة.

ليكن الآن $\varphi(h)$ تابعا كيفيا يحقق فرض التوطئة. من اجل $\varepsilon > 0$ معطى نبحث عن $\delta > 0$ بحيث يكون لدينا:

$$(4) \qquad \int_{a}^{a+\delta} |\varphi(h)|\, dh < \frac{\varepsilon}{3}.$$

إن التابع $\varphi(h)$ محدود (بالطويلة) بعدد $M = M(\varepsilon)$ وهو مستمر بتقطع في المجال $[a+\delta, b]$. نفكك المجال $[a+\delta, b]$ الى عدد منته $N = N(\varepsilon)$ من المجالات $[a_1, b_1], \ldots, [a_N, b_N]$ بحيث يكون التابع $\varphi(h)$ مستمرا على كل منها. نطبق على كل مجال التقدير (3) فنجد بمراعاة (4):

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left| \int_{a}^{b} \varphi(h) e^{i\nu h}\, dh \right| &\leqslant \int_{a}^{a+\delta} |\varphi(h)|\, dh + \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{a_k}^{b_k} \varphi(h) e^{i\nu h}\, dh \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \omega_{\varphi}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{\nu} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \omega_{\varphi}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b-a) + N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{\nu}. \end{aligned}$$

يبقى الآن ايجاد، باعتبار ε معلوما، عدد ν بحيث تكون الكميتان $\omega_{\varphi}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)(b-a)$ وَ $N(\varepsilon) M(\varepsilon) \frac{2\pi}{\nu}$ اصغر من $\varepsilon/3$. بعد ذلك يتم برهان النظرية.

14 .33 . نعود الى المساواة 14 .13(2). بامكاننا الآن البرهان على النظرية:

نظرية. إذا كان تابع $f(t)$ مستمرا بتقطع على المجال $[-\pi, \pi]$ وكان التابع $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ قابلا للمكاملة مطلقا بالنسبة لـِ h بالمفهوم الموسع في جوار النقطة $h = 0$، فإن المجاميع الجزئية $s_{m,n}(t)$ لسلسلة فوريي التابع $f(t)$ تتقارب عند النقطة $t = t_0$ نحو القيمة $f(t_0)$ عندما $m \to \infty$ وَ $n \to \infty$ (باستقلال m وَ n عن بعضها البعض).

البرهان. إذا كان التابع $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ قابلا للمكاملة بالمفهوم الموسع في جوار النقطة $h = 0$ فإن الامر كذلك فيما يخص التابع:

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{\sin\frac{h}{2}} = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \cdot \frac{h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

وبالتالي يأتي من التوطئة ان التكامل (2):

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{\sin\frac{h}{2}}\{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}\}\,dh=\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right\}$$

يؤول الى الصفر عندما $h\to\infty$. انتهى برهان النظرية.

43. 14 . يسمى شرط قابلية المكـاملـة المطلقـة لـ $\frac{f(t_0+h)-f(t)}{h}$ بالنسبة لـ h لما $h\to 0$، شرط ديني (Dini) لـ $f(t)$. إنه شرط متوفر، مثلا، عندما يكون التابع $f(t)$ محققا لشرط ليبشيتز من الرتبة $\alpha>0$:

$$|f(t+h)-f(t)|\leqslant C\,|h|^{\alpha}.$$

بصفة خاصة عندما يقبل التابع $f(t)$ عند النقطة t_0 مشتقا منتهيا فإن شرط ليبشيتز من الرتبة 1 محقق وبالتالي فإن الاعداد $s_{m,n}(t_0)$ متقاربة نحو $f(t_0)$.

53. 14 . التقارب المنتظم لسلسلة فوريي على مجموعة $E\subset Q$. يبين البرهان الوارد اعلاه ان بامكاننا الحصول، بنفس الطريقة، على التقارب المنتظم لسلسلة فوريي على مجموعة $E\subset Q$.

نقول عن شرط ديني للتابع $f(t)$ انه **متوفر بانتظام على مجموعة** $E\subset Q$ إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon>0$ ، ايجاد $\delta>0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\int_{|h|<\delta}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|dh<\varepsilon$$

من اجل كل $t\in E$ في آن واحد.

نظـريـة. إذا كـان $f(t)$ محدودا ومستمـرا بتقطـع علـى المجـال $Q=[-\pi,\pi]$ (مع العلم ان النقطتين $-\pi$ وَ π متطابقان كالعادة) وكان شرط ديني للتابع $f(t)$ محققا بانتظام على مجموعة $E\subset Q$ ، فإن سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على المجموعة E

البرهان. كنا كتبنا الفرق $s_{m,n}(t) - f(t)$ على الشكل:

$$s_{m,n}(t) - f(t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+h) - f(t)] \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}} dh.$$

لنثبت ان هذا الفرق يؤول الى الصفر بانتظام على المجموعة E. نضع: $\varphi(t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{\sin\frac{h}{2}}$. من الفرض، نرى من اجل كل $\varepsilon > 0$ انه يوجد $0 < \delta_0$ لا يتعلق بـ t بحيث:

$$\int_{|h|<\delta_0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{\sin\frac{h}{2}} \right| dh = \int_{|h|<\delta_0} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \frac{h}{\sin\frac{h}{2}} dh \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

إن التابع $\varphi(t, h)$ محدود (بالطويلة) خارج المجال $|h| \leqslant \delta_0$ بالعدد: $M(\varepsilon) = \frac{2M}{\sin\frac{\delta_0}{2}}$ ، حيث $M = \max|f(t)|$ ؛ ثم إن هذا التقدير لا يتعلق بـ t. لكن المجموعة Z_t المؤلفة من نقاط تقطع التابع $\varphi(t, h)$ يتعلق بـ t ؛ نحصل على Z_t بسحب مجموعة نقاط تقطع التابع $f(h)$ (باستثناء ممكن لنقطة التقطع $h = 0$ التي سبق ان عزلناها) بـ $-t$. وبالتالي يمكن من اجل كل t تغطية المجموعة Z_t بمسحوب مناسب S_t لجملة منتهية مثبتة من المجالات مجموع اطوالها اصغر من $\frac{\varepsilon}{3M(\varepsilon)}$ او يساويه. نلاحظ ان المجموعة G_t ، اتحاد عدد مثبت $N(\varepsilon)$ من المجالات يكون فيها التابع $\varphi(t, h)$ مستمرا (لا يمكن ان يزداد عدد هذه المجالات لأن بعضها متواجد داخل المجال المعزول $|h| \leqslant \delta_0$) تبقى خارج S_t .

ليكن:

$$g(h) = \frac{1}{\sin\frac{h}{2}} \qquad (|h| \geqslant \delta_0).$$

نستطيع تقدير التذبذب $\omega_\varphi(\delta)$ للتابع $\varphi(t, h)$ ، بفضل 71.5 ـ د، كما يلي:

$$\omega_\varphi(\delta) \leqslant \max|f(t+h) - f(t)|\,\omega_g(\delta) + \omega_f(\delta) \max|g(h)| \leqslant$$
$$\leqslant 2M_f\omega_g(\delta) + M_g\omega_f(\delta).$$

يعطينا الآن التقدير 14 .23(5):

$$4\pi \mid s_{m,n}(t)-f(t)\mid = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(h,\ t)\,[e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h} - e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)h}]\,dh \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left[2M_f\omega_g\left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}\right) + M_g\omega_f\left(\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}\right)\right]2\pi +$$

$$+ N(\varepsilon)\,M(\varepsilon)\frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{3} +$$

$$+ \left[2M_f\omega_g\left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) + M_g\omega_f\left(\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)\right]2\pi + N(\varepsilon)\,M(\varepsilon)\frac{2\pi}{n+\frac{1}{2}}.$$

إذا كان n وَ m كبيرين بكفاية فإن الطرف الايمن يصبح اصغر من ε من اجل كل $t \in E$ في آن واحد، وهو المطلوب. انتهى البرهان.

14 .63 . نتيجة. إذا كان شرط ليبشيتز من الرتبة $0 < \alpha$:

$$\mid f(t+h) - f(t) \mid \leqslant C \mid h \mid^{\alpha}$$

محققا من اجل كل نقطة t من مجموعة $E \subset Q$ وكان الثابت C لا يتعلق بالنقطة $t \in E$ فإن سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على E. بصفة خاصة إذا قبل التابع $f(t)$ مشتقا محدودا على مجال $[c, d] \subset Q$ (على التوالي مشتقا من اليمين أو من اليسار عند النقطتين c وَ d) فإن شرط ليبشيتز من الرتبة 1 متوفر من اجل كل $\mid h \mid \leqslant \delta$ مهما كان المجال الداخلي في $[c+\delta,\ d-\delta]$:

$$\mid f(t+h) - f(t) \mid \leqslant \mid h \mid \sup_{t\in[c,\,d]} \mid f'(t) \mid;$$

وبالتالي فإن سلسلة فوريي للتابع $f(t)$ متقاربة نحو بانتظام على كل مجال $[c+\delta,\ d-\delta]$.

14 .73 . إذا لم يتحقق شرط ديني عند نقطة فإن النظرية 14 .33 لا تقوم وقد تكون سلسلة فوريي التابع $f(t)$ متباعدة (سنرى ذلك في 14 .15) لا يمكن أن تتحقق العلاقة

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{m,n}(t_0) = f(t_0)$$

الا بمفهوم الانتقال المعمم الى النهاية. من الطبيعي اعتبار، باديء ذي بدء،

المجاميع الجزئية المتناظرة:

$$s_{n,n}(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

بخصوص المجموع الجزئي المتناظر $s_{n,n}(t)$ (نرمز له في المستقبل بـ $s_n(t)$ فقط) نحصل من 13.14 (1) على العبارة التالية:

$$s_n(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)h}}{\sin\frac{h}{2}}\,dh=$$

$$(1)\qquad =\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}}\,dh=\int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\,D_n(h)\,dh,$$

حيث

$$D_n(h)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}}$$

يمثل نواة ديركليت. لو شكلت التوابع $D_n(h)$ متتالية في شكل دلتا من اجل النقطة 0 لاستطعنا تطبيق النظرية 55.12 ـ ب والحصول مباشرة على تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي للتابع $f(t)$ نحو قيمته $f(t_0)$ عند كل نقطة استمرار t_0 لـ $f(t)$. لكن التوابع $D_n(h)$ لا تشكل متتالية في شكل دلتا، ذلك ما سنراه ضمن 15.14؛ زيادة على ذلك نجد، بوضع $f(t)\equiv 1$ في (1)، $s_n(t)\equiv 1$ وَ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(h)\,dh=1.$$

باستخدام هذه الخاصيات سندرس تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي للتابع $f(t)$ في نقاط تقطعه من النمط الاول.

83.14 . سلوك سلسلة فوريي في نقاط تقطع التابع $f(t)$ من النمط الاول.

لتكن t_0 نقطة تقطع من النمط الاول للتابع $f(t)$، بحيث توجد القيمتان:

$$f(t_0+0)=\lim_{t\searrow t_0} f(t),\qquad f(t_0-0)=\lim_{t\nearrow t_0} f(t).$$

نفرض ان شرطي ديني الوحيدي الجانب محققان اي ان التكاملين:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} \left| \frac{f(t)-f(t_0+0)}{t} \right| dt, \quad \int_{t_0+\delta}^{t_0} \left| \frac{f(t)-f(t_0-0)}{t} \right| dt$$

متقاربان من اجل عدد $\delta > 0$. عندئذ تكتب الكمية $s_n(t_0)$ ، كما سبق، على النحو:

$$s_n(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(t_0+h)] D_n(h)\, dh.$$

بادخال القيمتين $f(t_0+0)$ وَ $f(t_0-0)$ ، نحوّل العبارة المحصل عليها:

$$s_n(t_0) = \int_{-\pi}^{0} [f(t_0+h) - f(t_0-0)] D_n(h)\, dh +$$

$$+ \int_{0}^{\pi} [f(t_0+h) - f(t_0+0)] D_n(h)\, dh +$$

$$+ f(t_0-0) \int_{-\pi}^{0} D_n(h)\, dh + f(t_0+0) \int_{0}^{\pi} D_n(h)\, dh =$$

$$= I_1 + I_2 + [f(t_0-0) + f(t_0+0)] \int_{0}^{\pi} D_n(h)\, dh,$$

حيث استعملنا جوزية نواة ديركليت $D_n(h)$. يتبين من التوطئة 23. 14 ان الكميتين I_1 وَ I_2 تؤولان الى الصفر عندما يؤول n الى ∞.
إن الحد الاخير لا يتعلق بـِ n وهو يساوي $\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$.
وهكذا إذا تحقق شرطاً ديني الوحيدا الجانب عند نقطة تقطع من النمط الاول، مثلا إذا وجد المشتقان: $f'(t_0+0) = \lim_{h\searrow 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0+0)}{h}$,

$$f'(t_0-0) = \lim_{h\searrow 0} \frac{f(t_0-0)-f(t_0-h)}{h},$$

فإن المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي التابع $f(t)$ تتقارب نحو العدد

$$\frac{1}{2}[f(t_0+0) + f(t_0-0)].$$

إذا وضعنا سلسلة فوريي التابع $f(t)$ على الشكل:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (1)$$

فإن المجموع الجزئي من الرتبة n لهذه السلسلة:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

مطابق، كما رأينا ضمن 32.14 ، للمجموع المتناظر من الرتبة n للتابع $f(t)$ ، في شكله العقدي؛ إذن فإن نص النظرية حول تقارب السلسلة، (1) هو نفس النص في نقاط الاستمرار (حيث يتحقق شرط ديني ثنائي الجانب) وفي نقاط التقطع من النمط الاول (حيث يتحقق شرطا ديني الوحدي الجانب).

نشير ايضا الى ان حشد حدود السلسلة (1) المشار اليه بالاقواس لا يؤثر في طبيعة السلسلة ذلك لأن $a_n\to 0$ وَ $b_n\to 0$ (62.14 ـ أ).

§ 4.14 . خاصيات اخرى لسلاسل فوري. تطبيقات.

14.14 . حساب معاملات فوري. نشير هنا لبعض الخاصيات البسيط لمعاملات فوري، التي تسهل علينا حساب هذه المعاملات.

أ. إذا كان $f(t)$ زوجيا، أي إذا كان $f(-t)=f(t)$ فإن لدينا

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt=0,$$

وينشر $f(t)$ حسب سلسلة فوري وفق التوابع $\cos nt$. زيادة على ذلك:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt. \quad (1)$$

ب. إذا كان $f(t)$ تابعا فرديا، اي $f(-t)=-f(t)$ فإن لدينا:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=0,$$

وينشر $f(t)$ حسب سلسلة فوري وفق التوابع $\sin nt$. زيادة على ذلك

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt. \quad (2)$$

24.14 . أ. ليكن $f(t)$ تابعا كثير الحدود بتقطع، اي ان المجال $[-\pi,\pi]$ ينقسم الى عدد منته من المجالات $[t_j, t_{j+1}]$ ،

$j = 0, 1, \ldots, m-1$ بدون نقاط داخلية مشتركة، بحيث يتطابق التابع مع كثير حدود $p_j(t) = \sum_{k=0}^{s} p_{jk} t^k$ على المجال $[t_j, t_{j+1}]$.

عندئذ يكون:

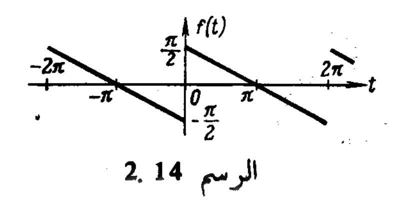
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t) e^{-int} dt.$$

نحوّل كل حد بالمكاملة بالتجزئة.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j(t) e^{-int} dt = p_j(t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt =$$

$$= \frac{1}{in} [p_j(t_j) e^{-int_j} - p_j(t_{j+1}) e^{-int_{j+1}}] - \frac{i}{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p_j'(t) e^{-int} dt.$$

نكامل عددا منتهيا من المرات فنحصل على عبارة خالية من التكاملات وتأخذ معاملات فوريي شكل كثير حدود لـ $1/n$ وَ e^{int_j} . يبين الحساب المماثل للمعاملات a_n و b_n انها تمثل كثيرات الحدود لـ $1/n$ و $\cos nt_j$ و $\sin nt_j$.



الرسم 2.14

ينتج من النظريات العامة الواردة في 3.14 ان سلسلة فوريي كل تابع كثير حدود بتقطع $f(t)$ متقاربة نحو $f(t)$ عند كل نقطة استمرار لـ $f(t)$. إن هذا التقارب منتظم على كل مجال لا يحوي داخله ولا على حافته نقاط تقطع للتابع $f(t)$. ثم إن المجاميع المتناظرة تتقارب عند كل نقطة تقطع نحو القيمة $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$.

ب . **مثال**. نعتبر التابع $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ $(0 < t < \pi)$ الممتد بصفة فردية على المجال $0 > t > -\pi$ ، ثم بصفة دورية بدورة 2π على كل المحور $\infty > t > -\infty$ (الرسم 2.14). طبقا لـ 14.14 ـ ب فإن التابع

$f(t)$ ينشر حسب سلسلة فوريي وفق التوابع $\sin nt$ ، ومنه:

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin nt\, dt = -\frac{\pi - t}{2} \frac{\cos nt}{n}\Big|_\pi^0 + \frac{1}{2} \int_\pi^0 \frac{\cos nt}{n} dt = \frac{\pi}{2n}.$$

وهكذا لدينا على $(0, 2\pi)$:

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n},$$

حيث ان السلسلة متقاربة عند كل نقطة $t \in (0, 2\pi)$ بانتظام في كل مجال $[\delta, 2\pi - \delta]$ ، $\delta > 0$. ثم إن مجموع السلسلة منعدم بفضل 83. 14 عند النقطتين $t = 0$ وَ $t = 2\pi$.

جـ. يمكن في بعض الحالات، عندما تعطى المعاملات a_n وَ b_n في شكل كثيرات حدود لـ $1/n$، $\cos nt$، $\sin nt$ ، جمع سلسلة فوريي والحصول على دستور صريح للتابع كثير الحدود بتقطع $f(t)$ [12]. ورغم هذا فإن هناك سلاسل بسيطة جداً لا تمثل سلسلة فوريي تابع كثير حدود بتقطع كما هو حال السلسلة $\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n}$ (راجع 14. 14).

34. 14 . العلاقة بين قابلية اشتقاق التابع $f(t)$ ورتبة تناقص معاملات فوريي $f(t)$.

أ . ليكن. $f(t)$ تابعا مستمرا على الدائرة $Q = [-\pi, \pi]$ له مشتق $f'(t)$ مستمر بتقطيع. ولتكن c_n معاملات فوريي التابع $f(t)$ (بالنسبة للجملة e^{int}) وَ c'_n معاملات فوريي التابع $f'(t)$. لدينا:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{c'_n}{in}.$$

إن الحد الخالي من التكامل منعدم هنا لأن $f(-\pi) = f(\pi)$ حسب فرض استمرار التابع $f(t)$ على كل الدائرة Q . ثم إن الاعداد c'_n بصفتها معاملات فوريى لتابع مستمر بتقطع تؤول الى الصفر؛ نرى إذن ان معاملات فوريى تابع $f(t)$ قابل للإشتقاق تؤول الى الصفر اسرع من

$1/n$. من جهة اخرى فإن سلسلة الاعداد $|c_n|$ متقاربة، وهو ما يأتي من المتراجحة:

$$|c_n| = \frac{1}{|n|}|c'_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c'_n|^2\right)$$

ومن تقارب سلسلة الاعداد $|c'_n|^2$. (بالنظر الى مقياس فيراشتراس 356 نلاحظ أن ذلك يبين، بدون استعمال النظرية 14 .63 التقارب المنتظم لسلسلة فوريى لتابع $f(t)$ يحقق الشروط المفروضة في هذا البند) اذا كان التابع $f(t)$ مستمرا ولم نفرض وجود مشتقة فإن تقارب سلسلة الاعداد $|c_n|$ غير محقق عموما ذلك ماسنراه ادناه (14 .35).

ب. إذا كان التابع $f(t)$ مستمرا وله مشتقات مستمرة حتى الرتبة $(m-1)$ وكان المشتق $f^{(m)}(t)$ مستمرا بتقطيع فإننا نستطيع مواصلة تحويل (1) بان نرمز بـ $c_n^{(k)}$ لمعاملات فوريى التابع $f^{(k)}(t)$:

$$(2)\quad c_n = \frac{c'_n}{in} = \frac{c''_n}{(in)^2} = \ldots = \frac{c_n^{(m-1)}}{(in)^{m-1}} = \frac{c_n^{(m)}}{(in)^m} \quad (n = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

تشكل المعاملات $c_n^{(m-1)}$ في هذه الحالة سلسلة متقاربة مطلقا (راجع أ)؛ وبالتالي، اضافة الى العلاقات (2)، يمكن كتابة العبارة التالية للمعاملات c_n :

$$c_n = \frac{\varepsilon_n}{|n|^{m-1}} \quad (n = \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots),$$

حيث السلسلة $\sum_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n|$ متقاربة.

14 .44 . أ. يمكن كتابة القضايا السابقة عكسياً ولو جزئيا. نفرض أن المعاملات c_n لتابع $f(t)$ لها الشكل:

$$c_n = \frac{\theta_n}{|n|^m}, \quad |\theta_n| \leqslant c, \quad m \geqslant 2,$$

او

$$c_n = \frac{\varepsilon_n}{|n|^{m-2}}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n| < \infty, \quad m \geqslant 2.$$

عندئذ يكون لـ $f(t)$ مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة $(m-2)$. ذلك ان سلسلة فوريى التابع $f(t)$ ، ضمن الفرض الوارد، متقاربة بانتظام (حسب مقياس فيراشتراس) كما هو الحال فيما يخص

السلاسل التي نحصل عليها بالإشتقاق المتوالى الشكلي حتى الرتبة: $m-2$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \equiv s_0(t),$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in) e^{int} \equiv s_1(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (in)^{m-2} e^{int} \equiv s_{m-2}(t).$$

نرى، بفضل 14 .62 جـ ان التابع $f(t)$ مطابق لِـ $s_0(t)$. ثم من النظرية 9 .87 الخاصة باشتقاق متتالية توابع فإن التابع $s_0(t)$ يقبل الاشتقاق ومشتقة يطابق $s_1(t)$ ؛ لدينا نفس الشيء فيما يخص التابع $s_1(t)$, الخ..، اخيرا نرى التابع $f(t)$ يقبل الاشتقاق باستمرار $m-2$ مرة.

ب. إذا كـان للتـابـع $f(t)$ مشتقـات مستمـرة مـن كـل الرتـب $m=1, 2, \ldots,$ فإن معاملات فوريى هذا التابع تحقق المتراجحات.

$$(1) \quad |c_n| \leqslant \frac{\theta_m}{|n|^m}, \quad m=1, 2, \ldots,$$

وبالتالي فهي تتناقص بسرعة تفوق سرعة اية قوة لِ $1/|n|$ وبالعكس إذا كانت معاملات فوريى تابع $f(t)$ تحقق المتراجحات (1) من اجـل كـل =1 ، 2 ،... فإنه يتبين مما ورد اعلاه ان التابع $f(t)$ مستمر ومشتقاته من كل الرتب مستمرة. وهكذا فإن صنف التوابع القابلة للإشتقاق لا نهائيا تحدده الشروط (1) المفروضة على معاملات فوريى c_n. تحديدا تاما.

14 .54 *. مسألة المحيطات المتساوية. هي المسألة التقليدية التالية: اوجد، من بين المنحنيات المستوية المغلقة والمرنة بتقطيع ذات طول معطى، المنحنى الذي يحيط باكبر مساحة ممكنة. إن حل هذه المسألة هو الدائرة لإثبات ذلك نقوم، كما فعل هـورويتـز (Hurwitz)، بـالإنشـاء التـالي. ليكـن $z(s)=x(s)+iy(s)$ التمثيل الوسيطي لمنحنـى مستـو مغلـق ومـرن

بتقطع L ، اما طول القوس s فيمثل الوسيط (36.9 ـ ص). نفرض بادى ذي بدء ان الطول الكلي للمنحنى L يساوي $2\pi,$ بحيث يكون $z(2\pi)=z(0).$ نكتب نشريْ فوريى للتابعين $x(s)$ وَ $y(s)$:

$$(1)\quad x(s)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty (a_n \cos ns+b_n \sin ns),$$

$$(2)\quad y(s)=\frac{c_0}{2}+\sum_1^\infty (c_n \cos ns+d_n \sin ns);$$

لدينا من 34.14 ـ أ:

$$x'(s)=\sum_1^\infty (-na_n \sin ns+nb_n \cos ns),$$

$$y'(s)=\sum_1^\infty (-nc_n \sin ns+nd_n \cos ns).$$

بما ان $[x'(s)]^2+[y'(s)]^2=1$ (36.9 ـ ص) نجد بواسطة 52.14(1):

$$(3)\quad 2\pi=\int_0^{2\pi} \{[x'(s)]^2+[y'(s)]^2\}\,ds=$$

$$=\pi\sum_1^\infty n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

ثم من تطبيق الدستور 49.9(4) باعتبار المساحة G الواقعة داخل منحنى مغلق وبمراعاة 52.14(3) نجد:

$$(4)\quad G=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [xy'(s)-yx'(s)]\,ds=\pi\sum_{n=1}^\infty n(a_n d_n-b_n c_n).$$

انطلاقا من العلاقتين (3) وَ (4) يأتي:

$$(5)\quad 2-\frac{2G}{\pi}=\sum_1^\infty \{n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2n(a_n d_n-b_n c_n)\}=$$

$$=\sum_1^\infty \{(na_n-d_n)^2+(nb_n+c_n)^2+(n^2-1)(c_n^2+d_n^2)\}\geqslant 0.$$

وهكذا فإن المساحة G الواقعة داخل منحنى مغلق طوله 2π لايتجاوز π. نعالج حالة المساواة في (5)؛ من اجل كل $n=1$ ، 2 ، ... لدينا:

$$na_n-d_n=0,\ nb_n+c_n=0,\ (n^2-1)(c_n^2+d_n^2)=0.$$

بصفة خاصة نحصل في حالة $n>1$ على $c_n=d_n=0,$ ومنه $a_n=b_n=0$

من نفس الاعداد $n > 1$. بوضع $n = 1$ نجد $a_n = d_n$، $b_n = -c_n$.
يأتي حينئذ من (3) ان $a_1^2 + b_1^2 = 1$ ويمكننا وضع $a_1 = \cos \alpha$، $b_1 = \sin \alpha$. بنقل ذلك في (1) و (2) نحصل في الاخير على:

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + \cos(s - \alpha),$$

$$y(s) = \frac{c_0}{2} + \sin(s - \alpha);$$

إن هذا المنحنى هو الدائرة المتمركزة في النقطة $(a_0/2, c_0/2)$. ذات نصف القطر إذا كان الطول الكلي للمنحنى L يساوي عدد $l \neq 2\pi$، نجري التحويل $x' = 2\pi x/l$، $y' = 2\pi y/l$ الذي يحول المنحنى L الى منحنى L' طوله 2π (36.9 ـ د) يحيط بالمساحة $G' = (2\pi/l)^2 G$ (16.9 ـ د، ر). مما رأينا يأتي:

$$G' \leqslant \pi, \quad G \leqslant \frac{l^2}{4\pi},$$

اما في الحالة الحدية التي يكون فيها L' دائرة نصف قطرها 1 فإن المنحنى L هو ايضا دائرة لكن نصف قطرها يساوي $l/(2\pi)$.

64. 14 . استعمال المتغير العقدي. نرمز لنقاط دائرة الوحدة $Q = \{x^2 + y^2 = 1\}$ بالمتغير العقدي $z = x + iy = e^{it}$، $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ نضع $f(t) \equiv F(z)$. تأخذ سلسلة فوريى التابع $f(t)$ الشكل:

$$(1) \quad f(t) \equiv F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

كنا التقينا في 54. 10 بسلسلة من الشكل (1) وفق قوى z (سلسلة لورانت). يمكن التعبير عن المعاملات c_n بالتكاملات بالنسبة لِـ t كما سبق ان فعلنا ويمكن ايضا التعبير عنها بالتكاملات بالنسبة للمتغير العقدي z وذلك باستعمال المساواة:

$$dz = ie^{it}\, dt = iz\, dt.$$

التي يأتي منها:

$$(2) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} F(z)\, z^{-n-1}\, dz$$

إذا كان التابع $F(z)$ يقبل التمديد تحليليا داخل دائرة الوحدة فإن

سلسلة لورانت، وبالتالي سلسلة فوريي ايضا، تصبح سلسلة تايلور:

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n.$$

74. 14 . مثال. لنحسب مجموع السلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}$. يمكن كتابة:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} + i \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n},$$

وهذا ما يردنا الى مسألة حساب المجموع $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n}$ او المجموع $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. نلاحظ ان مجموع السلسلة الاخيرة تنتج بمكاملة حدا حدا من 0 الى z السلسلة:

$$\sum_{0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$$

نعلم (75. 10) ان:

$$\int_{0}^{z} \frac{d\zeta}{1-\zeta} = -\int_{1}^{1-z} \frac{d\omega}{\omega} = -\ln(1-z),$$

هذا إن اخترنا كسبيل للمكاملة في مستوى العناصر ω منحنيا لا يقطع نصف المحور الحقيقي السالب، وهذا يوافق في مستوى العناصر ζ ($\omega = 1 - \zeta$)منحنيا لا يقطع الجزء $\zeta \geqslant 1$ من نصف المحور الحقيقي الموجب. يكفي ان نكامل على طول قطع المستقيمات $[0, z]$ (وهو ما يضمن وحدانية تعيين التابع($-\ln(1 - z)$)). إن السلسلة (1) متقاربة من اجل $|\zeta| < 1$ بحيث نجد:

$$-\ln(1-z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (2)$$

من اجل $|z| < 1$ ثم إن السلسلة (2) متقاربة ايضا من اجل $|z| = 1$ $z \neq 1$ (36. 6 ـ ج)؛ بما ان التابع $\ln(1 - z)$ يبقى مستمرا عند هذه النقاط فإن المساواة (2) تبقى قائمة من اجل تلك النقاط حسب نظرية آبل 76. 6 . لدينا من اجل كل $w = |w| e^{i \arg w}$, (75. 10):

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w$$

بصفة خاصة إن كان $z = e^{it}$ ،$\operatorname{Im} z > 0$ فإن طويلة وعمدة الكمية

$z - 1$ يمكن تعيينها بسهولة حسب الرسم 14 .3 . لدينا :

$$|1-z| = 2\sin\frac{t}{2}, \ \arg(1-z) = \frac{t-\pi}{2}$$

ثم

$$\ln|1-z| = \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right),$$

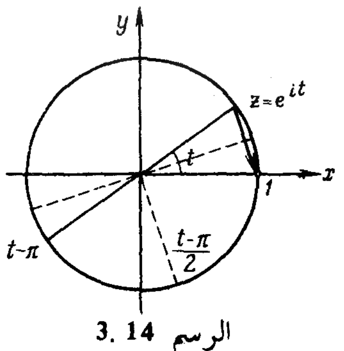
$$\ln(1-z) = \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + i\,\frac{t-\pi}{2}$$

ومنه، من اجل $t \in (0, 2\pi)$:

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + i\,\frac{\pi-t}{2}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right), \ \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi-t}{2}.$$

مع العلم انه سبق الحصول على مجموع السلسلة $\frac{\sin nt}{n}$ $\sum_1^\infty$(14 .24 ـ ب)



الرسم 14 .3

14 .84* مسألة الحلول الدورية. لتكن :

$$a_0 u^{(m)}(t) + a_1 u^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m u(t) = g(t) \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة طرفها الثاني $g(t)$ دوري دورته 2π. السؤال المطروح هو هل تقبل هذه المعادلة حلا $u(t)$ دورته 2π.

نبحث عن مثل هذا الحل في شكل سلسلة فوريي:

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k e^{ikt}, \qquad (2)$$

حيث ترمز u_k للمعاملات المجهولة. بافتراض انه من الشرعي الإشتقاق حدا حدا m مرة السلسلة (2) وبوضع :

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m \equiv p(\lambda)$$

$$(3) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} u_k p(ik) e^{ikt} = a_0 u^{(m)}(t) + \ldots + a_m u(t).$$

من جهة اخرى، نعتبر:

$$(4) \qquad g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}$$

وهو نشر فوريي التابع $g(t)$. نقارن النشرين المتعامدين (3) و (4) فنجد من اجل كل $=0$، ± 1، ± 2، ...:

$$g_k = p(ik)\, u_k,$$

ومنه، من اجل $p(ik) \neq 0$،

$$u_k = \frac{g_k}{p(ik)},$$

وبالتالي فالحل المطلوب هو:

$$(5) \qquad u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k}{p(ik)} e^{ikt}.$$

تؤدي هذه الاستدلالات الكشفية الى النصين الموالين:

أ. نفرض ان معاملات فوريي التابع الدوري $g(t)$ تشكل سلسلة متقاربة مطلقا (مثلا، $g(t)$ مرن بتقطع). إذا لم ينعدم $p(ik)$ من اجل $=0$، ± 1، ± 2، ... فإن المعادلة (1) تقبل حلا دورياً وحيداً.

ذلك اننا نلاحظ الفرض الوارد انه كثير الحدود $p(ik)$ من الدرجة m تقبل التحديد من الادنى التالي:

$$|p(0)| \geqslant c, \quad |p(ik)| \geqslant c\,|k|^m \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

ومنه ينتج أن

$$\left| \frac{g_k}{p(ik)} \right| \leqslant \frac{|g_k|}{c\,|k|^m}$$

بفضل 44. 14 ـ أ فإن التابع $u(t)$ المعرف بالمساواة (5) يقبل مشتقات مستمرة بما فيها المشتق من الرتبة m-، ويمكن الحصول على هذه المشتقات بالاشتقاق حدا حدا في السلسلة (5). بنقل ذلك الى المعادلة (1) نلاحظ ان هذه الاخيرة محققة إذا وجد زيادة على الحل الدوري الموجود حل دوري آخر فإن الفرق $v(t)$ بينهما حل دوري للمعادلة:

$$(6) \qquad a_0 v^{(m)}(t) + a_1 v^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m v(t) = 0.$$

نحن نعرف الحل العام للمعادلة (6)، الذي يكتب بدلالة التوابع ذات الشكل $e^{\lambda t}$, حيث $p(\lambda) = 0$ (81.13). إن هذه التوابع الاسية لا تؤدي الى حلول دورية دورتها 2π الا إذا كان $\lambda = ik$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. بما ان الفرض ينص على كوْن هذه العلاقات غير محققة فإنه لايوجد حل دوري غير منعدم للمعادلة (6). وهو الامر الذي يثبت وحدانية الحل الدوري للمعادلة(1).

ب. إذا كان $p(ik) = 0$ من اجل بعض الاعداد الصحيحة $k = k_1,$ ، $\ldots, k_r$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا دوريا دورته 2π إذا وفقط إذا كان $g_{k_j} = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ (يبقى فرض النظرية السابقة حول التقارب المطلق لسلسلة الاعداد g_k قائما)؛ إن هذا الحل معرف بتقدير الحد الجمعي $\sum_{j=1}^{r} c_j e^{ik_j t}$ ، حيث c_j ثوابت كيفية.

ذلك انه إذا كان $g_{k_j} = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ فإن العبارة (5) بالثوابت الكيفية c_j المتعلقة بالمعاملات $\frac{g_{k_j}}{p(ik_j)}$ (التي هي من الشكل $0/0$ في الحالة الراهنة) تمثل كما هو الحال في أ حلا دوريا للمعادلة (1). إذا كان لدينا $p(ik) = 0,$ ، $g_q \neq 0,$ من اجل عدد $k = q,$ فإن نقل تلك العبارة في المعادلة (1) وبالضرب سلميا المتطابقة المحصل عليها في e^{-iqt} نرى ان: $p(iq) = g_q = 0$ يعني ذلك ان المعادلة (1) لا تقبل دوريا إن البرهان على النقطة الاخيرة من النظرية مماثل للبرهان الوارد في أ.

94.14* . نختار من بين التطبيقات العديدة لسلاسل فوريي في مسائل الفيزياء الرياضية تطبيقين وهما: حل مسألة ذبذبة وتر متجانس ومسألة وجه توازن غشاء دائري.

أ. نفرض ان لدينا وترا مثبتا عند النقطتين 0 و π من محور العناصر x وان هذا الوتر يطابق في حالة التوازن المجال $[0, \pi]$ (الرسم 4.14). إذا اعطينا للوتر شكلا كيفيا ممثلا، على سبيل المثال، بتابع $f(x)$ ثم تركناه حرا فإنه يدخل في حركة تذبذبية. مرادنا حينئذ هو ايجاد التابع $u(t, x)$

الذي يعين شكل الوتر في اللحظة t . تستنتج المعادلة التي يخضع لها التابع $u(t, x)$ من الفيزياء الرياضية وهي تكتب عند اعتبار بعض الشروط المختصرة، على الشكل:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

حيث a ثابت. يجب حل هذه المعادلة ضمن الشرطين الابتدائيين التاليين:

1) $u(0, x) = f(x)$ (الشكل الابتدائي معطى)

2) $\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0$ (السرعة الابتدائية منعدمة).

نقوم بحل هذه المسألة باستعمال سلاسل فوريي. لننشر التابع $u(t, x)$ المعرف من اجل كل $t \geqslant 0$ مثبت على المجال $[0, \pi]$ حسب سلسلة فوريي وفق التوابع $\sin nx$:

$$u(t, x) = \sum_{1}^{\infty} b_n(t) \sin nx. \tag{2}$$

علينا تعيين المعاملات $b_n(t)$. نلاحظ ان الشرطين الإبتدائيين 1) وَ 2) محققان إن اخترنا المعاملات بحيث:

3) $b_n(0) = b_n$ هو معامل فوريي التابع $f(x)$;

4) $b'_n(0) = 0.$

ينبغي الآن على التابع (2) ان يحقق المعادلة (1). لدينا بصفة شكلية:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \sum_{1}^{\infty} b''_n(t) \sin nx, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = -\sum_{1}^{\infty} n^2 b_n(t) \sin nx. \tag{4}$$

تكون المعادلة (1) محققة إن كان لدينا من اجل كل $n=1, 2, \ldots$:

$$b''_n(t) = -a^2 n^2 b_n(t). \tag{5}$$

إن حل المعادلة (5) بالشرطين الابتدائيين 3) وَ 4) هو:

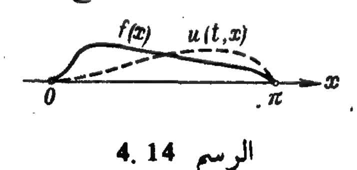
$$b_n(t) = b_n \cos a\, nt, \tag{6}$$

وبذلك ياخذ الحل (2) الشكل النهائي.

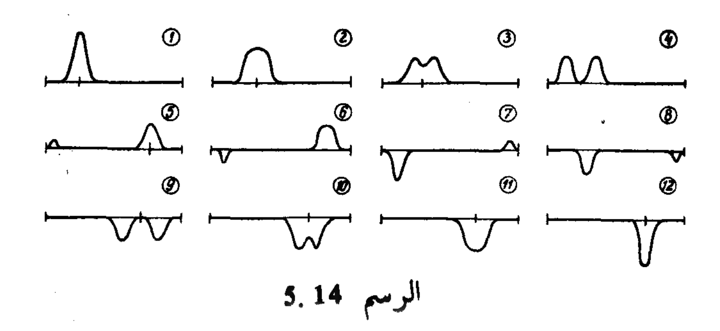
$$u(t, x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \cos a\, nt \sin nx. \tag{7}$$

يكون الاشتقاق الشكلي في 3) وَ 4) شرعيا إذا كانت السلسلتان الواردتان فيهما ضمن الطرف الثاني متقاربتين بانتظام بمراعاة (6) يكفي من اجل ذلك ان تكون السلسلة:
$$\sum_1^{\infty} b_n n^2 \cos a\, nt \sin nx$$

متقاربة بانتظام على المجال $0 \leqslant x \leqslant \pi$؛ ويتحقق ذلك بدوره إن كانت السلسلة $\sum_1^{\infty} |b_n| n^2$ متقاربة. ثم إننا نلاحظ ان السلسلة الاخيرة تكون متقاربة عندما يكون التابع $f(x)$ مستمراً وكذا مشتقة الاول والثاني ويكون مشتقة الثالث مستمرا بتقطيع (44.14 ـ أ)



الرسم 4.14


الرسم 5.14

نشير الى انه بالإمكان وضع الحل (7) في شكل لا يتطلب اي اشتقاق للتابع $f(x)$. هذا الشكل يتضح من كون

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} b_n [\sin n(x+at) + \sin n(x-at)] =$$
$$= \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)].$$

نقصد هنا بـ $f(x+at)$ وَ $f(x-at)$، في حالة خروج المتغير $x+at$ (او $x-at$) من ساحة اتالتعريف الابتدائي $[0, \pi]$ للتابع $f(x)$، نتيجة الامتداد الفردي لـ $f(x)$ على المجال $[-\pi, 0]$ متلواً

بالامتداد الدوري، الذي دورته 2π-، على كل المحور $-\infty < x < \infty$

هناك سؤال مطروح: ما معنى القول ان التابع (8) يحقق المعادلة (1) عندما لا يقبل التابع $f(x)$ مشتقا ثانيا؛ تجيب الفيزياء الرياضية دون صعوبة معتبرة عن مثل هذه الاسئلة بتعميم مفهوم الحل ذاته، سوف لن نقدم تفاصيل حول هذه النقطة [11]. يبين الرسم 5.14 الوضعيات المتوالية للوتر المتذبذب التي يعنيها الدستور (8)، مع العلم ان الوضعية الابتدائية هي الوضعية الاولى.

ب. وجه توازن غشاء دائري. نفرض ان غشاء وضع فوق القرص: $Q=\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ وثبّت بواسطة الدائرة $\Gamma=\{x^2+y^2=1\}$، ونفرض ان شكل الغشاء فوق هذه الدائرة معطى بتابع مستمر $z=f(t)$ للزاوية القطبية t. في حالة التوازن تحت تأثير قوى التمطط) ياخذ الغشاء الشكل الممثل بتابع $z=u(x,y)$ (الرسم 6.14). نستنتج المعادلة التي تخضع لها هذا التابع من الفيزياء الرياضية؛ وهي ممثلة ضمن بعض الشروط المختصرة بمعادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (9)$$

يجب البحث عن حل $u(x,y)$ للمعادلة (9) مستمر في كل القرص Q (نقول عن مثل هذه التوابع إنها توافقية، راجع 81.10) ويساوي التابع $f(t)$ على المنحنى Γ.

لإيجاد $u(x,y)$ ننشر التابع $f(t)$ حسب سلسلة فوريي:

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

نستعمل الرمز $\sim$ من المحتمل الاّ تتقارب سلسلة فوريي التابع المعطى $f(t)$ نحو نفس التابع (سنرى ذلك في 15.14). نضع ضمن الاحداثيات القطبية:

$$u(r,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty r^n(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\quad(r<1). \qquad (10)$$

إن التابع $u(r, t)$ هو الجزء الحقيقي للتابع التحليلي

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n-ib_n)z^n \quad (r=|z|<1), \tag{11}$$

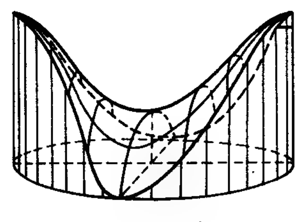
وبالتالي فهو يحقق معادلة لابلاس (81.10) داخل القرص Q. لنثبت ان الشروط الاخرى محققة ايضا. نكتب معاملات فوريى بشكل صريح فيأتي:

$$u(r, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)(\cos nt\cos n\tau+\sin nt\sin n\tau)\,r^n\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty} r^n\cos n(t-\tau)\right\}d\tau.$$

يمكننا هنا تغيير ترتيب الجمع والمكاملة لأن مقياس فيرشتراس 35.6 يبين ان السلسلة المكتوبة بين حاضنيَّن متقاربة بانتظام بالنسبة لِـ t من أجل $r<1$.



الرسم 6.14

لدينا من 74.6 - س:

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty} r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}$$

ومنه

$$u(r, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\,d\tau=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)P_r(t-\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

حيث

$$P_r(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \quad (r<1);$$

يسمى هذا التابع نواة بواسون (Poisson)

بما ان مقام نواة بواسون له الشكل:

$$1-2r\cos t+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2},$$

فإن هذه النواة غير سالبة. لنتأكد انها تتمتع بخاصيات تابع لِـ t في شكل دلتا من اجل $t\to 1$. نضع في (12) $f(t)\equiv 1$ فينتج من (10)

$u(r,t)\equiv 1$ ، إذن: $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\tau)\,d\tau=1.$

ثم، من اجل كل $\delta>0$ ، لدينا التقدير:

$$\int_{|t|\geqslant\delta} P_r(\tau)\,d\tau\leqslant\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta}\frac{d\tau}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\tau}{2}}\leqslant\frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

الذي يبين ان:

$$\lim_{r\to 1}\int_{|t|\geqslant\delta} P_r(\tau)\,d\tau=0.$$

بتطبيق النظرية 12 .55 ـ ص على التوابع ذات الشكل دلتا نرى ان التابع $u(r,t)$ المكَمل بالقيم $f(t)$ على المنحنى Γ مستمر في القرص Q ، وهو المطلوب.

يُبرهن في نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية على وحدانية الحل الوارد اعلاه في صنف التوابع التوافقية [11].

جـ ـ تستخلص من مسالة الغشاء هذه نتائج اخرى من بينها نتائج رياضية محضة. ليكن $u(r,t)$ تابعا توافقيا داخل القرص $\{r\leqslant 1\}$ يأخذ على الدائرة $r=1$ القيم المستمرة المعطاة $f(t)$. حسب ما بينا في ب وبمراعاة الملاحظة حول الوحدانية فإن الحل يكتب من اجل $1>r$ بواسطة تكامل بواسون (12). تؤول معاملات فوريي a_n وَ b_n التابع $f(t)$ الى الصفر من اجل $n\to\infty$ اما سلسلة تايلور (11) فإن نصف قطر تقاربها لا يمكن ان يكون اصغر من 1، وبالتالي فهذه السلسلة تمثل في القرص $1>r$ تابعا تحليليا جزؤها الحقيقي هو التابع (12) (اي التابع التوافقي المعطى) اما الجزء الخيالي للسلسلة (11) فيعطينا تابعا توافقيا

$v(r, t)$ مرافقا لـ $u(r, t)$. وهكذا يقبل كل تابع توافقى تابعا توافقيا مرافقا. نحصل على الشكل الصريح للتابع $v(r, t)$ بتعويض في الدستور (12) نواة بواسون $P_r(t)$ بتابعه التوافقي المرافق. هذا الاخير هو مجموع التوابع المرافقة لحدود السلسلة (10).

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} r^n \sin nt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{r \sin t}{1-2r\cos t+r^2}$$

(74.6 ـ س) لدينا في الختام فيما يخص التابع المطلوب $v(r, t)$، الدستور:

$$v(r, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\frac{r\sin\tau}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\,d\tau.$$

§ 14 .5 . تباعد سلاسل فوريي والجمع المعمم

14 .15 . إذا كان $f(t)$ تابعا مستمرا فإن مسألة تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريى، إن لم نفرض توفر شرط دينىء مسألة لا زالت لحد الساعة مفتوحة. فقد تبين ان هناك توابع مستمرة مجاميعها المتناظرة الخاصة بسلسلة فوريى مجاميع متباعدة (في نقاط منعزلة على الاقل). ينتج ذلك في الواقع، من كوْن نوى ديركليت لا تشكل متتالية في شكل دلتا او على وجه التحديد من كون:

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \infty,$$

وهو ما سنراه.

نحن نعلم انه يمكن كتابة مجموع جزئي متناظر $s_n(t)$ لسلسلة فوريى لتابع $f(t)$ كما يلي (14 .73(1))

$$s_n(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+h)\, D_n(h)\, dh,$$

حيث: $$D_n(h) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

نضع للإختصار $t=0$ بحيث ان:

$$s_n(f, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(h)\, D_n(h)\, dh.$$

متتالية تابعيات خطية على الفضاء الباناخى $C^s(Q)$ المؤلف من كل التوابع

العقدية المستمرة على $[-\pi, \pi]$. سنرى ان نظيمات هذه التابعيات اي الاعداد:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, dh$$

(17.12 ـ ل) تؤول الى لا نهاية. سينتج من ذلك، حسب نظرية باناخ ـ ستينهاوس (Banach - Steinhaus) (47.12 ـ أ)، وجود عنصر من الفضاء $C^*(Q)$، اي تابع مستمر $f_0(t)$، تكون من اجله الاعداد $s_n(f_0, 0)$ غير محدودة يعني ذلك ان سلسلة فوريي التابع $f_0(t)$ غير متقاربة (حتى تناظرياً) عند النقطة $t = 0$.

إذن ترد المسألة الى اثبات العلاقة:

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, dh = \infty.$$

بتطبيق المتراجحة $\frac{h}{2} \leqslant \frac{h}{2}\ (0 \leqslant h \leqslant \pi)$ نكتب:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, dh = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) h\right|}{\sin\frac{h}{2}}\, dh \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) h\right|}{h}\, dh.$$

نجري التعويض $(n + 1/2)\, h = t$ فنحصل على

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(h)|\, dh \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt.$$

تتزايد الكمية الاخيرة لانهائيا من اجل $n \to \infty$ وهذا حسب تباعد التكامل الموسع لِـ $|\sin t|/t$ في المجال $(0,\infty)$ (61.11 ـ أ). ذلك ما يبرر هذا الانشاء*.

نشير الى وجود تابع $f_0(t)$، مع تباعد سلسلة فوريي، في كل كرة $U_\rho(g) = \{f : \|f - g\| \leqslant \rho\}$ من الفضاء $C^*(Q)$. من اجل كل تابع من هذا النوع فإن سلسلة طويلات معاملات فوريي متباعدة هي

---

* يتبين من النظرية الحديثة لِـ كارلسون Carleson (1966) ان نقاط تباعد سلسلة فوريي لتابع $f(t) \in H\ (-\pi, \pi)$ تمثل استثناء: من أجل كل $\varepsilon > 0$، فإن كل هذه النقاط يمكن تغطيتها بجماعة قابلة للعد من المجالات بمجوع اطوالها اصغر من ε.

الاخرى لأن تقاربها يؤدي، حسب مقياس فيرشتراس، الى التقارب المنتظم لسلسلة فوريي.

25. 14 . هناك سؤال مطروح: هل يمكن تجاوز هذه العقبة باستخدام بعض طرق جمع السلاسل المتباعدة (67. 12)؟ نعتبر طريقة المتوسطات الحسابية (سيزارو Cesàro) التي تتمثل في الانتقال من المتتالية الابتدائية: $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ الى المتتالية:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

لدينا هنا مباشرة اجابة عن السؤال المطروح:

نظرية (ل. فيجر Fejér، 1905) من اجل كل تابع $f(t)$ مستمر على الدائرة $Q = \{-\pi \leqslant t \leqslant \pi\}$، فإن متتالية المجاميع الجزئية المتناظرة لسلسلة فوريي $s_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt}$ متقاربة نحو $f(t)$ بانتظام على Q بمفهوم سيزارو أي ان لدينا:

$$\underset{m\to\infty}{\text{C-lim}}\, s_m(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0(t) + s_1(t) + \ldots + s_{n-1}(t)}{n} = f(t)$$

بانتظام على Q.

البرهان. طبقا لـ 73. 14 فإن لدينا:

$$s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, D_m(t-\tau)\, d\tau,$$

وبالتالي:

$$\sigma_n(t) \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(t) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{m=0}^{n-1} D_m(t-\tau)\, d\tau.$$

ثم لدينا:

$$\sum_{m=0}^{n-1} D_m(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)h}{\sin\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)h \sin\frac{h}{2}}{\sin^2\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\cos mh - \cos(m+1)h}{2\sin^2\frac{h}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\cos nh}{2\sin^2\frac{h}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\frac{n}{2}h}{\sin\frac{h}{2}},$$

إذن:

$$(1)\ \sigma_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\frac{\sin^2 n\frac{t-\tau}{2}}{\sin^2\frac{t-\tau}{2}}\,d\tau.$$

يسمى التابع

$$F_n(h)=\frac{1}{2\pi n}\,\frac{\sin^2\frac{n}{2}h}{\sin^2\frac{h}{2}}$$

نواة فيجر. خلافا لنواة ديركليت فإن هذا التابع غير سالب. ثم إذا كان $f(t)\equiv 1,$ فإن $s_m(t)\equiv 1$ و $\sigma_n(t)\equiv 1.$ وينتج من (1) ان:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(h)\,dh=1$$

اخيرا لدينا من اجل كل $\delta>0,$:

$$\int_{|h|>\delta} F_n(t-\tau)\,d\tau=\int_{|h|>\delta} F_n(h)\,dh\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi n}\int_{|h|>\delta}\frac{dh}{\sin^2\frac{h}{2}}=\frac{C(\delta)}{2\pi n}\to 0.$$

وهكذا فإن نواة فيجر يتمتع بكل خاصيات متتالية من الشكل دلتا (55. 12 ـ أ). بتطبيق النظرية الاساسية 55. 12 ـ د على المتتاليات ذات الشكل دلتا نجد $\sigma_n(t)\to f(t)$ وهذا التقارب منتظم بالنسبة لِـ $t\in Q,$ ، وهو المطلوب.

35. 14 . إن الجمع بطريقة المتوسطات الحسابية حالة خاصة من الجمع بواسطة مصفوفة توبليتز (76. 12 ـ ج). من الطبيعي ان نتساءل عن الشروط التي ينبغي فرضها على مصفوفة توبليتز $T=\|q_{nm}\|$ لكي تتقارب سلسلة فوريي اي تابع مستمر $f(t)$ نحو هذا التابع نفسه. نذكر اننا طبقنا اعلاه مصفوفات توبليتز في جمع متتاليات محدودة؛ الآ انه قد تكون متتالية مجاميع جزئية لسلسلة فوريي تابع مستمر متتالية غير محدودة (15. 14)؛ لن نعتبر إذن سوى المصفوفات المثلثية لتوبليتز التي يحوى سطرها من الرتبة n على الاكثر n عنصرا غير منعدم، والتي تسمح إذن بانشاء، حسب اية متتالية عددية $c=\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ ، التابعيات

$$T_n(c)=\sum_{m=0}^{\infty} q_{nm}c_m=\sum_{m=0}^{n} q_{nm}c_m.$$

إن كانت $\lim T_n(c)$ موجودة، نضع تعريفا $T\text{-}\lim c_n = \lim T_n(c)$

لتكن إذن $T = \| q_{nm} \|$ مصفوفة مثلثية لتوبليتز وَ $Q = \sup_n \sum_{m=1}^{\infty} | q_{nm} |$.

لتكن

$$s(t) = \{s_m(t)\}, \quad s_m(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t-\tau)\, d\tau \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

متتالية المجاميع الجزئية المتناظرة لسلسلة فوريي تابع $f(t)$ ؛ يرمز $D_m(t)$ دائما لنواة ديركليت:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

لدينا:

$$T_n(s) = \sum_{m=0}^{n} q_{nm} s_m(t) = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_m(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \sum_{m=1}^{n} q_{nm} D_m(t-\tau) \right\} d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) Q_n(t-\tau)\, d\tau,$$

حيث

$$Q_n(t) = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} D_m(t)$$

نظرية (س. نيكولسكي Nikolski 1948). إذا وجد ثابت $C > 0$ بحيث يتحقق، من اجل كل =0، 1، 2، ...، المتراجحة:

$$(1) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} | Q_n(t) |\, dt < C,$$

فإن $\lim T_n(s(t)) = f(t)$ بانتظام بالنسبة لِـ $t \in [-\pi, \pi]$، من اجل كل تابع مستمر $f(t)$. إن كان الامر غير ذلك، فإنه يوجد تابع مستمر $f(t)$ تكون من اجله الكميات $T_n(s(t))$ بدون نهاية، مثلا، عند النقطة $t = 0$.

البرهان. بما ان الشرط (1) محقق، نثبت ان النوى $Q_n(t)$ تشكل متتالية ذات الشكل دلتا.

لدينا في البداية:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\, dt = \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

بفضل خاصيات نواة ديركليت وعناصر مصفوفة توبليتز. ثم، من اجل

كل $\delta > 0$، لدينا :

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t)\, dt \right| = \left| \sum_{m=1}^{n} q_{nm} \int_{|t| \geq \delta} D_m(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |q_{nm}| D_{m\delta},$$

حيث

$$D_{m\delta} = \left| \int_{|t| \geq \delta} D_m(t)\, dt \right|$$

من اجل δ مثبت فإن الكمية $D_{m\delta}$ تؤول الى الصفر عندما $m \to \infty$ (23. 14) وبالتالي فهي محدودة؛ نضع $D_\delta = \sup_m D_{m\delta}$. من اجل عدد $\varepsilon > 0$ معطى نبحث عن رقم m_0 بحيث $D_{m\delta} < \varepsilon/(2Q)$ عندما $m \geqslant m_0$. نختار بعد ذلك عددا N بحيث $|q_{nm}| \leqslant \varepsilon/(2m_0 D_\delta)$ من اجل $m \leqslant m_0$، $n > N$ بهذا امر ممكن بفضل خاصيات عناصر مصفوفة توبليتز. حينئذ نجد من اجل $n > N$:

$$\left| \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{m=0}^{m_0} |q_{nm}| D_{m\delta} + \sum_{m_0+1}^{n} |q_{nm}| D_{m\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ينتج من ذلك ان:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|t| \geq \delta} Q_n(t)\, dt = 0.$$

نرى من (1) ان $Q_n(t)$ متتالية في شكل دلتا. بتطبيق النظرية الاساسية الخاصة بالمتتاليات ذات الشكل دلتا 55. 12 ـ د نصل الى التقارب المنتظم للمتتالية $T_n(s(t))$ نحو $f(t)$، وبذلك ينتهي نرهان الجزء الاول من النظرية. اما الجزء الثاني فيأتي من نظرية باناخ ـ ستينهاوس بنفس الطريقة الواردة في 15. 14 .

إذا كانت النواة $Q_n(t)$ غير سالبة فإن الشرط (1) متوفر. ينتج ذلك من الدستور الاول الوارد في برهاننا. بصفة خاصة فإن نواة فيجر (25. 14) من هذا النمط.

45. 14 . طبقنا في 94. 14 ـ ب مرة اخرى طريقة جمع معمم، فقد راينا انه إذا كانت

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

هي سلسلة فوريى تابع مستمر $f(t)$ فإن الدستور التالي محقق:

$$f(t)=\lim_{r\to 1}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,r^n\right\}$$

يمكن اعتبار الطرف الايمن من هذه المساواة كطريقة جمع معمم لسلسلة فوريى. تسمى هذه الطريقة طريقة الجمع المعمم بمفهوم بواسون وهي تطبق ايضا على توابع $f(t)$ متقطعة حتى ولو ان ذلك يؤدي الى نتائج اقل دقة.

§ 14 .6 . امثلة في الجمل المتعامدة.

14 .16 . المعامدة. تمثل جملة التوابع المثلثية، مثالا نادرا نسبياً لجملة متعامدة مشيدة بذاتها. ننشيء في العديد من الحالات جمل متعامدة انطلاقا من الجمل غير المتعامدة بطريقة «المعامدة» الوارد وصفها في 12 .34 ـ ص نذكر بها هنا بايجاز. لتكن $f_1, f_2, \ldots,$ جملة اشعة في فضاء هيلبرتي H (حقيقي او عقدي)، منتهية او غير منتهية ومستقلة خطيا اي ان كل جملة جزئية منتهية $f_1, \ldots, f_n$ مستقلة خطيا بالمفهوم الجبري المعتاد نعين الاشعة $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ بواسطة العلاقات التالية:

$$\left\{\begin{array}{l} g_1=f_1,\\ g_2=a_{21}f_1+f_2,\\ g_3=a_{31}f_1+a_{32}f_2+f_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ g_n=a_{n1}f_1+a_{n2}f_2+a_{n3}f_3+\ldots+f_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad (1)$$

نبرهن ان الثوابت a_{jk} في الدساتير (1) يمكن اختيارها، وهذا بطريقة وحيدة، بحيث تكون الاشعة $g_1\, g_2, \ldots$ متعامدة مثنى مثنى.

14 .26 . كثيرات حــدود لــوجنــدر (Legendre). نعتبر في الفضـــاء الهيلبرتي H (1 ,1—) جملة التوابع $f_0 \equiv 1$ و $f_1 \equiv t, \ldots, f_n \equiv t^n$ ونطبق عليها نظرية المعامدة. بما ان التوابع $1, t, \ldots, t^n,$ مستقلة خطيا فإن فرض النظرية محقق. نرمز لـ $L_n = L(1, t, \ldots, t^n)$ للفضاء الجزيئي

المؤلف من كثيرات الحدود التي لاتتجاوز درجتها k العدد n. إن التابع $g_n(t)$ كثير حدود درجته n معاملها الرئيسي يساوي 1 . يتبين ان الدستور الصريح لكثير الحدود $g_n(t)$ هو :

$$g_n(t)=C_n[(t^2-1)^n]^{(n)}, \quad (1)$$

وهذا مهما كان n .

لإثبات ذلك يكفي، بمراعاة الوحدانية الواردة في 16. 14 ، ان نلاحظ بأن كثير الحدود (1) الذي درجته n متعامد على التوابع :

$$1, t, \ldots, t^{n-1}.$$

توطئة. إن التابع $(t^2-1)^n$ منعدم عند النقطتين 1 و -1 وكذا مشتقاته المتوالية بما فيها المشتق من الرتبة -$(n-1)$، اما مشتقة من الرتبة n فهو غير منعدم عند هاتين النقطتين.

البرهان. ينتج من التمثيل $(t^2-1)^n = (t+1)^n(t-1)^n$ ومن دستور ليبنيتز 8. 21(3). بصفة خاصة:

$$[(t^2-1)^n]^{(n)}|_{t=1}=[(t+1)^n(t-1)^n]^{(n)}|_{t=1}=2^n\cdot n!. \quad (2)$$

نظرية. إن كثير الحدود (1) متعامد في الفضاء $H(-1, 1)$ على التوابع $1, t, \ldots, t^{n-1}$.

البرهان. نكامل بالتجزئة فنجد من اجل $k<n$:

$$(t^k, [(t^2-1)^n]^{(n)})=\int_{-1}^{1}t^k[(t^2-1)^n]^{(n)}dt=$$

$$=t^k[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{+1}-k\int_{-1}^{1}t^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}dt.$$

إن الحدود الواردة بدون تكامل تنعدم في التوطئة. تكامل بالتجزئة التكامل المتبقي ونواصل حتى يصبح اس t منعدما :

$$(t^k, [(t^2-1)^n]^{(n)})=-kt^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\Big|_{-1}^{+1}+$$

$$+k(k-1)\int_{-1}^{1}t^{k-2}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}dt=\ldots$$

$$\ldots=\pm k!\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(n-k)}dt=\pm k![(t^2-1)^n]^{(n-k-1)}\Big|_{-1}^{+1}=0,$$

وهو المطلوب.

من اللائق للحسابات ان نعوض التوابع المتعامدة المحصل عليها بتوابع متناسبة تساوي 1 من اجل $t = 1$. لهذا الغرض، نضع في (1): $C_n = 1/(2^n n!)$ (1) بمراعاة (2) نحصل عندئذ على كثيرات حدود من الشكل:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}[(t^2-1)^n]^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3}$$

تسمى كثيرات حدود لوجندر

بصفة خاصة:

$$P_0(t) \equiv 1, \; P_1(t) = t, \; P_2(t) = \frac{3}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right), \; P_3(t) = \frac{5}{2}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right), \dots$$

36. 14 . نبحث عن نظيم كثير الحدود لوجندر $P_n(t)$. لدينا:

$$(P_n, P_n) = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(n)}[(t^2-1)^n]^{(n)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}[(t^2-1)^n]^{(n)}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(n+1)}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\,dt.$$

ينعدم الحد الوارد بدون تكامل حسب التوطئة. بمواصلة المكاملة بالتجزئة حتى تصبح رتبة الاشتقاق في العامل الثاني الواقع تحت رمز المكاملة منعدمة نحصل على:

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)^n]^{(2n)}(t^2-1)^n\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(t-1)^n(t+1)^n\,dt.$$

نكامل مرة اخرى بالتجزئة لتخفيض اس $t-1$:

$$(P_n, P_n) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[(t-1)^n\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1} - n\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-1}\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}dt\right] =$$

. . . .

$$= \frac{(-1)^n(2n)!(-1)^n n!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)\dots 2n}\int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}dt = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(t+1)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{2n+1}.$$

اخيرا لدينا:

$$\|P_n\| = \sqrt{(P_n, P_n)} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \tag{1}$$

14 .46 . النشور وفق كثيرات حدود لوجندر. يمكن ان نصل كل تابع $f(t) \in H(-1, 1)$ بسلسلة لفوريي - لوجندر خاصة بهذا التابع:

$$1) \quad f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n P_n(t).$$

طبقا لـ 14 .71 فإن المعاملات γ_n (معاملات فوريي - لوجندر) تحسب بواسطة الدساتير:

$$\gamma_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t)\, dt.$$

نبين كما هو الحال في 14 .42 بخصوص سلاسل فوريي التقليدية، ان سلسلة فوريي - لوجندر (1) متقاربة نحو $f(t)$ بمفهوم المتوسط التربيعي:

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k(t) \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k(t) \right|^2 dt \to 0 \quad (n \to \infty).$$

وهذا عندما يؤول n الى $+\infty$.

لدينا مساواة بارسفال:

$$\| f \|^2 = \int_{-1}^{1} | f(t) |^2 dt = \sum_{0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} | \gamma_n |^2.$$

14 .56* نورد نصوص النظريات الخاصة بتقارب سلسلة فوريي - لوجندر عند النقاط المنعزلة، وبالتقارب المنتظم المماثلة للنظريات الواردة في §14 .3.

يكتب المجموع الجزيئي لسلسلة فوريي - لوجندر على الشكل:

$$s_n(t) \equiv \sum_{0}^{n} \gamma_k P_k(t) = \sum_{0}^{n} \frac{(2k+1) P_k(t)}{2} \int_{-1}^{1} f(\tau) P_k(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\tau) \sum_{0}^{n} (2k+1) \frac{P_k(\tau) P_k(t)}{2}\, d\tau.$$

يسمى التابع:

$$L_n(t, \tau) = \sum_{0}^{n} \frac{P_k(\tau) P_k(t)}{2} (2k+1)$$

نواة فوريي - لوجندر. يمكن اجراء عملية الجمع صراحة؛ تسمى نتيجة هذه العملية متطابقة كريستوفل - داربو (Christoffel-Darbou) (راجع التمرين 11):

$$L_n(t, \tau) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\tau) P_n(t) - P_n(\tau) P_{n+1}(t)}{t - \tau}$$

بمعالجة نواة فوريي - لوجندر كما عالجنا نواة ديركليت نستطيع البرهان على النظرية التالية: إذا كان تابع $f(t) \in H(-1, 1)$ مستمرا عند $t = t_0 \in (-1, 1)$ وقبل مشتقين $f'(t_0 - 0)$ و $f'(t_0 + 0)$، منتهيين فإن سلسلة فوريي لوجندر 14 .46(1) متقاربة عند النقطة t_0 نحو القيمة $f(t_0)$. إن هذا التقارب منتظم على كل مجموعة $E \subset [-1 + \delta, 1 - \delta]$ حيث $f'(t_0 - 0)$ و $f'(t_0 + 0)$ محدودان تتقارب السلسلة 14 .46 (1) نحو $[f'(t_0 + 0)$ $f'(t_0 - 0)$ عند كل نقطة تقطع من النمط الاول ($[f(t_0 - 0)$ و $f(t_0 + 0)]$. محدودان).

نجد برهانا على هذه النظرية في (24).

14 .66 . كمثال تطبيقي لكثيرات حدود لوجندر في الفيزياء الرياضية نشير الى المسألة التالية (راجع 14 .94 - ب). نريد حل معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

في الكرة $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ بحيث ياخذ التابع u على حافة الكرة، اي من اجل $r = 1$ ، القيم المعطاة $u = f(\theta)$ التي لا تتعلق الآ بالزاوية θ التي يشكلها الشعاع $\{x, y, z\}$ ومحور العناصر z. لانشاء الحل نقوم بما يلي: بعد نشر التابع $f(\theta)$ وفق كثيرات حدود لوجندر حسب التوابع $\cos\theta$:

$$f(\theta) = \sum_0^\infty \gamma_n P_n(\cos\theta),$$

نحصل على التابع المطلوب $u = u(r, \theta)$ حسب الدستور*:

$$u(r, \theta) = \sum_0^\infty \gamma_n r^n P_n(\cos\theta).$$

14 .76 . جمل متعامدة اخرى. نجد في الفيزياء الرياضية جملا متعامدة كثيرة. نشير هنا الى اكثرها استعمالا. نحصل على كل هذه الجمل بنفس الكيفية: نعتبر على مجال $-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant +\infty$ تابعا $p(x)$ غير سالب («تابع ثقل») يستخدم لإنشاء الفضاء التابعي $H_{p(x)}[a, b]$ المزود

* راجع مثلا [26].

بالجداء السلمي :

$$(f, g)_{p(x)} = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, p(x)\, dx$$

ثم نطبق على التوابع $1, x, x^2, \ldots$ طريقة المعامدة الوارد وصفها العام في 16. 14 .

أ من اجل $a = -1$ ، $b = 1$ ، $p(x) \equiv 1$, نحصل بطبيعة الحال على كثيرات حدود لوجندر.

ب . من اجل $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ نحصل على كثيرات حدود تشبيتشاف (Tchébychev) :

$$T_n(x) = \cos(n \arc \cos x);$$

تتحـول كثيرات الحدود هـذه الى التـوابـع $\cos nt$ عنـدمـا نضـع $x = \cos t$، ويصبح حينئذ الفضاء $H_{p(x)}(-1, 1)$ متشاكل مع الفضاء $H_1(0, \pi)$.

ج . من اجل $a = 0$ و $b = 1$, و $p(x) = x^{q-1}(1 - x)^{p-q}$ نحصل على كثيرات حدود جاكوبي (كثيرات حدود فوق هندسية)

د . من اجل $a = -\infty$, و $b = \infty$, و $p(x) = e^{-x^2}$, نحصل على كثيرات حدود هيرميت (Hermite) $H_n(x) = C_n e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n)}$.

ر . من اجل $a = 0$ و $b = \infty$, و $p(x) = e^{-x}$, نحصل على كثيرات حدود لاغير (Laguerre) :

$$L_n(x) = C_n e^x [x^n e^{-x}]^{(n)}.$$

تلجأ الفيزياء الرياضية وبصفة خاصة مسائل التذبذب، ايضا الى العديد من الجمل المتعامدة المؤلفة من توابع مصعّدة (او المسَامية) (راجع «22»).
يجد القارى عرضا لجمل التوابع المتعامدة في [25] وَ [19].

تمارين

1 . بنشر التابع الفردي المساوي لـ $\pi/4$ في $0 < x < \pi,$ حسب سلسلة فوريي، احصل على علاقات اولر التالية:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$
$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots=\frac{\pi}{4},$$
$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2 . بنشر التابع الزوجي المساوي لـ x في $0 < x < \pi,$ ، حسب سلسلة فوريي احصل على علاقتي اولر التاليتين:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6};$$
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{12}.$$

3 . اوجد مجموع كل من السلسلتين:

أ) $1+\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n!}+\ldots$

ب) $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$

4 . إذا شكلت المجاميع الجزئية لسلسلة فوريي في الفضاء $C(-\pi, \pi)$، مجموعة شبه متراصة (3 .39 ـ أ) فإن سلسلة فوريي متقاربة بانتظام.

5 . برهن على تقارب المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي عند نقطة بجوارها يكون التابع $f(x)$ المنشور تابعا رتيباً.

6 . (تتمة). برهن على ان المجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي تابع $f(t)$ متقاربة بانتظام على كل مجال داخل مجال يكون فيه التابع $f(t)$ مستمرا ورتيباً.

7 . نفرض أن تابعا $f(t)$ يحقق الشروط التالية:

1) $f(-t) = f(t),\ f(0) = 0,\ f(\pi - t) = f(t),\quad f(t + 2\pi) = f(t);$

2) $f(t)$ مستمر.

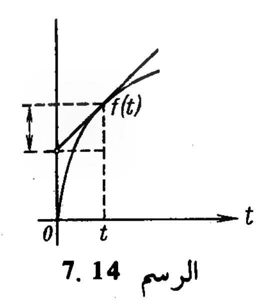
3) $f'(t)$ مستمر وغير متزايد من اجل $0 < t \leqslant \pi/2;$.

4) $\lim\limits_{t \searrow 0} t\,\frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ ؛ اي ان قطعة المستقيم المعينة بالمماس للمنحنى $y = f(t)$ على محور التراتيب تكافيء، من اجل $t \searrow 0$، احداثية التماس (الرسم 7. 14)

اثبت ان المعاملات b_n في سلسلة فوريى التابع $f(t)$

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin nt$$

لها الشكل: $b_n = 0$ من اجل n زوجي؛ $b_n = \frac{\theta_n}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + \varepsilon_n$ من اجل n فردي حيث $\theta_n \to 4/\pi$، وَ $\sum_{1}^{\infty} |\varepsilon_n| < \infty$.



الرسم 7. 14

8 . باستعمال حل التمرين 7 ، اعط مثالا لتابع مستمر له سلسلة فوريى متقاربة بانتظام على $[-\pi, \pi]$ وسلسلة معاملات فوريى غير متقاربة مطلقاً.

9 . باستعمال حل التمرين 7 ، اعط تابع $f(t)$ له سلسلة فوريى:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

متقاربة بانتظام على $[-\pi, \pi]$ في حين تكون لكل من السلسلتين

$$\sum_{0}^{\infty} c_n e^{int}, \quad \sum_{-\infty}^{0} c_n e^{int}$$

نقاط تباعد.

10 . ليكن $p(x)$ تابع ثقل (76. 14) وَ:

$$Q_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \gamma_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \ldots + \gamma_0^{(n)}$$

متتالية كثيرات الحدود المتعامدة والمتجانسة الموافقة له. برهن على دستور

التدريج:

$$xQ_n(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{\alpha_n} Q_n(x) + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} Q_{n-1}(x), \quad (1)$$

11 . (تتمة) اثبت متطابقة كريستوفل - داربو:

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x) Q_k(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{Q_n(x) Q_{n+1}(t) - Q_n(t) Q_{n+1}(x)}{t-x}.$$

12 . (تتمة) برهن على انه كثير الحدود $Q_n(t)$ $(n > 1)$ يقبل n جذرا في المجال $[a, b]$.

نبذة تاريخية

اثناء النقاش حول الوتر المتذبذب في السنوات 1750 بين اولر ودالمبير الذي تمحور حول تعريف التابع - هل هو عبارة تحليلية (دالمبير) أو منحنى يرسم بطريقة اختيارية (أولر)؟ - عولجت من بين الافكار المطروحة فكرة د. بادنولي التي تقول انه من الممكن تمثيل اي منحنى معطى على المجال [$0,2\pi$] بسلسلة توابع الجيب وجيب التمام. كانت لكل من اولر ودالمبير اسبابا جعلتهما ينكران هذه الامكانية، اما بادنولي فلم يتمكن من تعيين معاملات سلسلته لم يبث في هذه المسألة الآ سنة 1805 عندما قدم فوريى دساتير «معاملات فوريى» (12.14 - أ)

احدث اكتشاف فوريى اثر عظيما وبقي هذا الاكتشاف خلال القرن 19، معتبرا من كبريات نظريات التحليل على الرغم من انه حُصل عليه بمكاملة بسيطة، جداً جداً، لسلسلة مثلثية كتبت شكليا وضربت في تابع مثلثي معطى. لم يستطع فوريى البرهان على تقارب السلسلة نحو التابع المنشور نظرا لفقدانه التعاريف المتينة للتقارب والتكامل. قام بذلك ديركليت سنة 1829 بالاعتماد على التعاريف المتينة (كوشى، 1821) وهذا في حالة التوابع الرتيبة بتقطيع. صيغ «شرط دينى» من طرف دينى سنة 1880. أول من وجد مثالا لتباعد سلسلة فوريى تابع مستمر هو دي بوا - ديمون (1879). ادخلت «كثيرات حدود لوجندر» من طرف لوجندر سنة 1785 لحل معادلة لابلاس ضمن الاحداثيات الكروية. ورغم ذلك فلم يتوصل الى الدستور الصريح 26.14 (3) الآ دودريغاس سنة 1815. وجد نومان (1862) النشر وفق كثيرات حدود لوجندر للتوابع التحليلية ووجد هوبسن Hobson (1908) هذا النشر في الحالة العامة. اصبح من الممكن بفضل اعمال هيلبرت (1906 - 1911) هندسة نظرية النشور المتعامدة.

الفصل 15

تحويل فوريي

أأرفض غذائي لا لسبب سوى لأني لا
اعلم بالضبط كيف تتم عملية الهضم؟

اليفر هيفسايد

Oliver Heaviside

§ 15 .1 . تكامل فوريي ومقلوبه

15 .11 .عندما نريد تمثيل تابع $\varphi(x)$ دوري دورته 2π كتراكب توافقيات فإننا نتجه نحوي سلسلة فوريي:

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}. \tag{1}$$

اما اذا تعلق الامر بتابع دورته $2\pi l$ فإن سلسلة فوريي المنسوبة له تأخذ الشكل:

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{x}{l}} \tag{2}$$

حيث تعين المعاملات a_n بواسطة الدستور:

$$a_n=\frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)e^{-in\frac{\xi}{l}}d\xi. \tag{3}$$

نحصل على الدستور (3) بضرب (2) في $e^{-in\frac{x}{l}}$ وبالمكاملة بالنسبة لِـ x من $-\pi l$ الى πl .

ينتج من (2) وَ (3) ان:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-\pi l}^{\pi l}\varphi(\xi)e^{\frac{in}{l}(x-\xi)}d\xi. \tag{4}$$

من الطبيعي ان نحاول اجراء الانتقال الى النهاية $l\to\infty$ في الدستور (4) وذلك كي نمثل، إن امكن، كل تابع $\varphi(x)$ معرف على المحور

$-\infty < x < \infty$ باكمله كتراكب توافقيات. إن الانتقال الشكلي الى النهاية يؤدي بنا الى الدستور:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} \quad (5)$$

حيث يرمز σ للمتغير المستمر الذي نحصل عليه مكان المتغير المتقطع $\sigma_n = n/l$. وبالتالي فإن الدستور المطلوب لنشر تابع $\varphi(x)$ وفق التوافقيات يجب ان يكون من الشكل:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \quad (6)$$

حيث:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \quad (7)$$

كنا أينا الدستور (7) في الفصل الخاص بالتكاملات الموسعة (23. 11)؛ نذكر ان التابع $\psi(\sigma)$ المعرف بالدستور (7) يسمى **محولة فوريي** أو **تكامل فوريي** للتابع $\varphi(x)$. يسمى الدستور (6) **دستور القلب لفوريي**؛ نقول ايضا ان (6) يعرف التحويل المقلوب لفوريي. لا يختلف التحويل (6) في الواقع عن التحويل (7) الآ باشارة الاس وبالمعامل $1/(2\pi)$.

21. 15 .بدل اثبات شرعية الانتقال الى النهاية في الدستور 15 .11(5)، سنبين مباشرة ان 15 .11(7) يستلزم 15 .11(5)، وهذا ضمن بعض الشروط على التابع $\varphi(x)$.

نفرض في البداية ان التابع $\varphi(x)$ مستمر بتقطع وقابل للمكاملة مطلقا على كل المحور $-\infty < x < \infty$. من شان ذلك ان يضمن وجود التكامل 15 .11(7) من اجل كل تابع لـ σ حيث $-\infty < \sigma < \infty$.

هذه اول نتيجة للفرض المعتبر: إن التابع $\psi(\sigma)$ محدود ومستمر من اجل كل σ ويؤول الى الصفر عندما $|\sigma| \to \infty$. تأتي المقولة الاولى من التقدير:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi$$

إن قابلية المكاملة المطلقة للتابع $\varphi(x)$ يستلزم التقارب المنتظم بالنسبة للوسيط $\sigma \in (-\infty, \infty)$ لتكامل فوريي 15 .11(7) حسب المقياس 11 .74 أ. بمراعاة النظرية 11 .34 واستمرار التابع $e^{i\sigma\xi}$ ينتج استمرار التابع $\psi(\sigma)$. للبرهان على المقولة الثالثة نبحث من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عن عدد A بحيث:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi)|\, d\xi + \int_{A}^{\infty} |\varphi(\xi)|\, d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

نطبق الآن التوطئة 14 .23 على المجال $[-A, A]$ ؛ سنرى انه يوجد σ_0 بحيث يكون لدينا، من اجل $|\sigma| > \sigma_0$ ،

$$\left| \int_{-A}^{A} \varphi(\xi)\, e^{-i\sigma\xi}\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي لدينا من اجل $|\sigma > \sigma_0$:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\sigma\xi}\, d\xi \right| \leqslant \int_{-\infty}^{-A} |\varphi(\xi)|\, d\xi + \left| \int_{-A}^{A} \varphi(\xi)\, e^{-i\sigma\xi}\, d\xi \right| + \int_{A}^{\infty} |\varphi(\xi)|\, d\xi < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

15 .31 . قبل البرهان على الدستور 15 .11(5) نعتبر تكاملا موسعا خاصا من النمط الثالث:

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t}\, dt \quad (p, q > 0).$$

إن التابع الواقع تحت رمز المكاملة مستمر على المستقيم الحقيقي باكمله (نجد بسهولة القيمة $i(p+q)$ كنهاية عند $(t=0)$). ينتج تقارب التكامل I_{pq} من 11 .71 ـ ب. لنحسبه. لدينا:

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\cos qt - \cos pt}{t} + i\, \frac{\sin qt}{t} + i\, \frac{\sin pt}{t} \right\} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos qt - \cos pt}{t}\, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qt}{t}\, dt +$$

$$+ i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin pt}{t}\, dt \equiv 2\pi i.$$

التكامل الاول منعدم بسبب فردية التابع الواقع تحت التكامل اما الثاني

والثالث فقد استعملنا فيها الدستور 11 .33 (1). بطريقة مماثلة، لدينا:

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{iqt}-e^{-ipt}}{t} dt = i \int_{-T}^{T} \frac{\sin qt}{t} dt + i \int_{-T}^{T} \frac{\sin pt}{t} dt$$

بما ان التكامل الموسع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

متقاربة بانتظام بالنسبة للوسيط $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ (11 .94 - ب)، يمكننا ايجاد من اجل كل $\varepsilon > 0$ عدد T_0 بحيث يكون من اجل كل $p \geqslant 1$ ، $q \geqslant 1$ ، $T \geqslant T_0$:

$$\left| \int_{|t| \geqslant T} \frac{e^{iqt}-e^{-ipt}}{t} dt \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

15 .41 .ننتقل للبرهان على الدستور 15 .11(5) ونبدأ بصياغة القضية التالية صياغة دقيقة:

نظرية. ليكن $\varphi(x)$ تابعا مستمرا بتقطع، قابلا للمكاملة على المستقيم $-\infty < x < \infty$ ويحقق، من اجل عنصر x ، شرطديني: اي يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$\int_{|t| \leqslant \delta} \left| \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} \right| dt < \infty$$

عندئذ يكون لدينا:

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma \tag{1}$$

بحيث ان النهاية في الطرف الايمن موجودة عندما يؤول p و q نحو اللانهاية باستقلال عن بعضها البعض.

البرهان. من اجل $p > 0$، $q > 0$ كيفيين، نضع:

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma.$$

ان التكامل الواقع بين حاضنتين متقارب بانتظام بالنسبة لِـ σ ويمكننا تغيير

ترتيب التكاملين بالنسبة لِـ σ وَ ξ حسب 44.11 :

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \int_{-p}^{q} e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right\} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{iq(x-\xi)} - e^{-ip(x-\xi)}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt$$

يُجري التحويل الاخير بواسطة التعويض $x - \xi = t$. يمكننا بفضل 31.15 (1) الاشارة للفرق $\varphi_{p,q}(x) - \varphi(x)$ كما يلي:

$$\varphi_{p,q}(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)] \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt. \tag{2}$$

نقسم هذا التكامل الى جزءين:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \leqslant T} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \geqslant T} \quad (T \geqslant 1). \tag{3}$$

يكتب الحد الثاني على الشكل:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \geqslant T} \varphi(x+t) \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt - \frac{\varphi(x)}{2\pi i} \int_{|t| \geqslant T} \frac{e^{iqt} - e^{-ipt}}{t} dt. \tag{4}$$

بما ان $\varphi(x+t)$ يقبل المكاملة بصفته تابعا لِـ t وان العامل $\frac{e^{iqt} - e^{ipt}}{t}$ لا يتجاوز بالطويلة العدد 2 من اجل $|t| \geqslant T \geqslant 1$. فإننا نرى ان الحد الاول للفرق (4) يؤول الى الصفر لما $T \to \infty$ ، باستقلال عن قيم p وَ q الاكبر مثلا ، من 1. يتمتع الحد الثاني لِـ (4) بنفس الخاصية بفضل 31.15 (2).

نكتب الحد الاول في (3) على الشكل:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \leqslant T} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} (e^{iqt} - e^{ipt}) dt.$$

لما كان التابع $\frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$ قابلا للمكاملة مطلقا على المجال $|t| \leqslant T$ (شرط ديني!) فإن هذا الحد يؤول الى الصفر حسب التوطئة 23.14 لما يتزايد p وَ q ، ومنه:

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \varphi_{p,q}(x) = \varphi(x) \tag{5}$$

وهو المطلوب.

يثبت هذا البرهان ايضا التقارب المنتظم للتكامل (1) بالنسبة للوسيط x الذي يرسم مجموعة محدودة E من المستقيم: $-\infty < x < \infty$ وذلك عندما يتحقق شرط دينى بانتظام على هذه المجموعة (53.14)؛ نثبت ذلك ايضا مع النظرية المماثلة لها الخاصة بسلاسل فوريى.

51.15 . اذا لم يتحقق شرط دينى عند نقطة x_0، فإن النظرية 41.15 لا تصح، ويمكن ان يكون تكامل فوريى للتابع $\varphi(x)$ متباعد كما هو الحال في سلاسل فوريى، فإن العلاقة:

$$\varphi(x_0) = \lim \varphi_{p,q}(x_0) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$$

لا يمكن ان تتحقق الا بمفهوم النهاية المعممة. نعتبر في البداية « التكامل الجزئي » المتناظر

$$\varphi_{p,p}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma$$

نرمز لها في المستقبل بـ $\varphi_p(x)$. انطلاقا من 41.15(2). لدينا من اجل $\varphi_p(x)$ التمثيل التالي:

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{e^{ipt} - e^{-ipt}}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) \frac{\sin pt}{t} dt. \qquad (1)$$

لدينا نظرية برهانها يماثل تماما برهان النظرية 83.14، وهي:

نظرية . لتكن x_0 نقطة تقطع من النمط الاول للتابع $\varphi(x)$، بحيث توجد النهايتان $\varphi(x_0 - 0)$ و $\varphi(x_0 + 0)$. إذا كان شرطا دينى الوحيدتا الجانب محققين، أي إذا تقارب التكاملان:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0+0)}{x} \right| dx, \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0-0)}{x} \right| dx$$

من اجل $\delta > 0$، فإن لدينا:

$$\varphi(x_0) = \lim_{p\to\infty} \varphi_p(x_0) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^{p} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma.$$

61.15 . ندرس الآن المتوسطات الحسابية لتكامل فوريى كما فعلنا ذلك في 25.14 بخصوص سلسلة فوريى، وذلك بدون افتراض صحة شرط

ديني. بدل المتوسط الحسابي للمجاميع المتناظرة لسلسلة فوريي نعتبر، بصفة طبيعية، المتوسط التكاملي للتكاملات المتناظرة $\varphi_p(x)$ (51. 15):

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\int_0^N \varphi_\nu(x)\,d\nu. \tag{1}$$

نستبدل $\varphi_\nu(x)$ بقيمتها الواردة في 51. 15 (1) فنجد:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi N}\int_0^N \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\frac{\sin \nu t}{t}\,dt\right\} d\nu =$$

$$= \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\left\{\int_0^N \sin \nu t\,d\nu\right\} dt = \frac{1}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x+t)}{t}\,\frac{1-\cos Nt}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\frac{\sin^2 \frac{N}{2}t}{t^2}\,dt.$$

تسمى العبارة

$$F_N(t) = \frac{2}{\pi N}\,\frac{\sin^2 \frac{N}{2}t}{t^2} \tag{2}$$

نواة فيجر Fejér لتكامل فوريي. تتمتع نواة فيجر بالخاصيات التالية:

1) $0 \leqslant F_N(t)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\,dt = 1$

3) $\int_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \to 0$ لما $N \to \infty$ مهما كان $0 < \delta$.

تأتي المتراجحة 1) مباشرة. ثم البرهان على المساواة 2) في 94. 11 ـ ب.

تنتج العلاقة 3) من التقدير:

$$\int_{|t|\geqslant\delta} F_N(t)\,dt \leqslant \frac{2}{\pi N}\int_{|t|\geqslant\delta} \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi N\delta}.$$

تستلزم المساواة 2) العلاقة:

$$\sigma_N(x) - \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\,F_N(t)\,dt. \tag{3}$$

نثبت فيما يلي النظرية:

نظرية. اذا كان تابع $\varphi(x)$ قابلا للمكاملة مطلقا وكان مستمراً بانتظام على مجموعة $E \subset R_1$ *، فإن المتوسطات الحسابية $\sigma_N(x)$ تكامل فوريي

(*) تعني الخاصية الاخيرة اننا نستطيع، من اجل كل 4>5، ايجاد 5<δ بحيث تستلزم العلاقة Hkδ المتراجحة التالية:

| Q (X + 1) ..Q α >| <4

وهذا مهما كان E∋x و R_1∋t. نشير ان النقطة X+t لا تنتمي بالضرورة للمجموعة E في هذا التعريف.

للتابع $\varphi(x)$ متقاربة بانتظام على E نحو $\varphi(x)$.

البرهان. من اجل $\varepsilon > 0$ معطى نبحث عن $\delta > 0$ بحيث ينتج من: $|t| < \delta$ ، $x \in E$ ، المتراجحة التالية $|\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq \varepsilon/2$.
بتطبيق الخاصيتين الاولى والثانية لنواة فيجر نحصل على:

$$|\sigma_N(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{|t| \leqslant \delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| F_N(t)\, dt +$$
$$+ \int_{|t| \geqslant \delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| F_N(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_N(t)\, dt + 2 \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| \int_{|t| \geqslant \delta} F_N(t)\, dt.$$

إن الحد الاول لا يتجاوز $\varepsilon/2$ من اجل كل N ، ويصبح الحد الثاني اصغر من $\varepsilon/2$ تماما من اجل N كبير بكفاية، مثلا من اجل $N > N_0$. في الاخير نجد من اجل $N > N_0$:

$$|\sigma_N(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

وهذا مهما كان $x \in E$، وهو المطلوب.

71. 15 . نحصل بالتالي على نظرية وحدانية محولة فوريي:

إذا كانت محولة فوريي $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x)$ قابل للمكاملة مطلقا ومستمر بالتقطع على المحور $-\infty < x < \infty$، منعدمة من اجل كل σ فإن $\varphi(x)$ منعدم اينما كان باستثناء محتمل لمجموعة لا تقبل اية نقطة نهاية منتهية على محور العناصر x.

ذلك ان لدينا: $\psi(\sigma) \equiv 0$ ، $\varphi_\nu(x) \equiv 0$ ، $\sigma_N(x) \equiv 0$ اذن: $\varphi(x) = \lim_{N \to \infty} \sigma_N(x) \equiv 0$ داخل كل مجال منته من مجالات استمرار التابع $\varphi(x)$ ؛ ثم إن نقاط تقطع التابع $\varphi(x)$ تشكل مجموعة منتهية، على الاكثر، في كل مجال منته من محور العناصر x، وهو المطلوب في النظرية.

§ 2. 15 . خاصيات اخرى لتكامل فوريي

نرمز فيما يلي بـ F لمؤثر فوريي: $F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx.$

نرمز لمقلوب تكامل فوريى بـ F^{-1} :

$$F^{-1}[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\, e^{i\sigma x}\, d\sigma$$

12. 15 . العلاقة بين سلوك تابع $\varphi(x)$ لما $|x| \to \infty$ وقابلية اشتقاق محولة فوريى.

نعلم ان محولة فوريى $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x)$ قابل للمكاملة مطلقا تابع محدود ومستمر لِـ σ، $-\infty < \sigma < \infty$ يؤول الى الصفــر لما $|\sigma| \to \infty$. نفــرض الآن ان $\varphi(x)$ وكــذلــك $x\varphi(x)$ يقبلان المكاملة مطلقا على المحور $-\infty < x < \infty$. يمكننا عندئذ القول ان التابع $\psi(\sigma)$ قابل للإشتقاق، اذ ان الاشتقاق الشكلى بالنسبة للوسيط σ لتكامل فوريى:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx = \psi(\sigma)$$

يعطي التكامل:

$$-i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

المتقارب مطلقا وبانتظام بالنسبة لِـ σ بفضل النظرية 11 .54 ـ أ فإن التابع $\psi(\sigma)$ يقبل الاشتقاق ولدينا:

$$\psi'(\sigma) = -i\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx.$$

نصل بذلك الى الدستور البيّن:

$$iF'[\varphi] = F[x\varphi]$$

الذي يبين أن عملية الضرب في x تحول بواسطة مؤثر فوريى الى العملية $i\frac{d}{d\sigma}$. إن التابع $\psi'(\sigma)$ هو دوما مستمر ومحدود ويؤول الى الصفر من اجل $|\sigma| \to \infty$ بصفته محولة فوريى لتابع يقبــل المكــاملــة مطلقــاً. اذا كــانـــت التـــوابـــع:

$x\varphi(x), x^2\varphi(x), \ldots, x^m\varphi(x)$ قابلــة للمكــاملــة مطلقا على المحور $-\infty < x \leqslant \infty$ وكذا التابع $\varphi(x)$ فإننا

نستطيع مواصلة الاشتقاق، سنرى ان التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ يقبل مشتقات متوالية، بما فيها المشتق من الرتبة ، مستمرة ومحدودة وتؤول الى الصفر لما $|\sigma| \to \infty$ ؛ لدينا الدستور:

$$i^k F^{(k)}[\varphi] = F[x^k \varphi] \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

اذا كانت كل الجداءات $x^m \varphi(x)$ قابلة للمكاملة مطلقا $(m = 0, 1, \ldots)$ فإن التابع $F[\varphi] = \psi(\sigma)$ يقبل مشتقات (بالنسبة لِـ σ) من كل الرتب، مع العلم ان كل مشتق مستمر ويؤول الى الصفر لما $|\sigma| \to \infty$.

نرى اذن انه بقدر ما يكون تناقص التابع $\varphi(x)$ بجواء اللانهاية سريعاً بقدر ما يكون التابع $\psi(\sigma)$ مرناً.

22. 15 . لنر كيف تتحسن خاصيات اشتقاق التابع $\psi(\sigma)$ عندما نفرض شروطا اضافية على سلوك التابع $\varphi(x)$ عند اللانهاية.

أ . نفرض ان الجداء $\varphi(x) e^{b|x|}$ ، مع ثابت مثبت $0 < b$، هو الذي يقبل المكاملة. عندئذ نستطيع القول ان محولة فوريي $\psi(\sigma)$ التابع $\varphi(x)$ تابع لا يقبل الاشتقاق لانهائيا فحسب بل هو تحليلي ايضاً. ذلك ان تكامل فوريي:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} dx$$

معرف الآن ليس فحسب من اجل الاعداد الحقيقية σ بل ايضا من اجل بعض العناصر σ العقدية: إذا وضعنا $s = \sigma + i\tau$ (σ وَ τ حقيقيان) فإن:

$$\psi(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x} e^{\tau x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx \qquad (1)$$

والتكامل متقارب من اجل $|\tau| \leqslant b$ ، اي في كل شريط افقي من المستوى العقدي الذي رمزنا لعناصره بـ s. إن التابع

للمتغير العقدي s، الذي حصلنا عليه، تابع تحليلي عند كل نقطة داخل الشريط؛ ذلك ان التكامل متقارب بانتظام في جوار للنقطة s (عندما يكون هذا الجوار محتويا في الشريط)، يسمح ذلك بتطبيق النظرية 11 .54 ـ ب. إن التابع $\psi(s)$ محدود في كل الشريط لأن:

$$|\psi(s)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{|\tau||x|} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx.$$

يمكننا القول ان التابع $\psi(s) = \psi(\sigma + i\tau)$ متقارب نحو الصفر بانتظام بالنسبة لِـ τ، $|\tau| \leqslant b$ لما $\sigma \to \pm\infty$.

لإثبات ذلك يجب التدقيق قليلا في استدلالات 15 .21. بصفة خاصة، بما ان التابع $\bar{\varphi}(x) e^{b|x|}$ يقبل المكاملة مطلقا يمكن ان نختار من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عدداً A بحيث:

$$\int_{-\infty}^{-A} |\varphi(x)| e^{b|x|} dx + \int_{A}^{\infty} |\varphi(x)| e^{bx} dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

نعتبر التكامل:

$$\int_{-A}^{A} \varphi(x) e^{-isx} dx = \int_{-A}^{A} \varphi(x) e^{\tau x} e^{-i\sigma x} dx.$$

يتبين من المتراجحة، 14 .23(5) انه يحقق المتراجحة:

$$\left| \int_{-A}^{A} \varphi(x) e^{-isx} dx \right| \leqslant 2A\omega \left[\varphi(x) e^{\tau x}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] + N_A M_A \frac{2\pi}{|\sigma|} \quad (2)$$

حيث يرمز $\omega(\psi, \delta)$ لتذبذب التابع $\psi(x)$ على مجالات استمراره ويرمز N_A لعدد تلك المجالات من اجل التابع $\varphi(x)$ على $[-A, A]$،

$$M_A = \sup_{|x| \leqslant A} |\varphi(x)| e^{\tau x}.$$

إن الحد الاول في الطرف الايمن من (2) لا يتجاوز، من اجل $|\tau| \leqslant b$، الكمية (5 .71 ـ د)

$$2A\omega \left[\varphi(x), \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] e^{Ab} + 2A\omega \left[e^{bx}, \frac{2\pi}{|\sigma|} \right] \max_{|x| \leqslant A} |\varphi(x)|$$

التي تؤول الى 0 لما $|\sigma|\to\infty$ وهذا باستقلال عن قيمة τ ، $|\tau|\leqslant b$. نلاحظ ان الامر كذلك. بخصوص الحد الثاني في (2). يمكن اختيار σ_0 بحيث، من اجل $|\sigma|>\sigma_0$ ، $|\tau|\leqslant b$:

$$\left|\int_{-A}^{A} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ينتج من ذلك من اجل $|\sigma|>\sigma_0$ ، كما هو الحال في 21. 15 :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx\right| < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

ب. نفرض الآن بأن جداء التابع $\varphi(x)$ في $e^{b|x|}$ يقبل المكاملة من اجل كل b . عندئذ يكون التابع $\psi(s)$ معرفا وتحليليا في كل شريط $|\tau|\leqslant b$ اي انه تابع تحليلي صحيح؛ يأتي مما رأينا ان هذا التابع الصحيح يبقى محدودا ومتقاربا بانتظام نحو الصفر من اجل $\sigma\to\pm\infty$ في كل شريط $|\tau|\leqslant b$ (بحاد من الاعلى متعلق بـ b).

32. 15 . يمكن اعتبار التوابع $\varphi(x)$ التي تتناقص عند اللانهاية بسرعة اكبر من السرعة السابقة، مثل التوابع التي يكون من اجلها الجداء $\varphi(x)\, e^{M(x)}$ ، حيث يتزايد $M(x)$ بسرعة اكبر من سرعة اي تابع خطي. من المستحسن وضع $M(x)$ على الشكل:

$$M(x)=\int_{0}^{x} \mu(\xi)\, d\xi \qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{1}$$

حيث $\mu(\xi)$ تابع مستمر متزايد يحقق $\mu(0)=0$ و $\mu(\infty)=\infty$ ؛ من اجل x سالب نضع $M(x)=M(-x)$.

يمكننا في هذه الحالة قصد تقديم خاصيات محولة فوريي التابع $\varphi(x)$ استخدام التابع $\Omega(\tau)$ الثنوي بمفهوم يونغ (Young) للتابع $M(x)$ ، وهو: الثنوي بمفهوم يونغ للتابع $M(x)$ هو

تعريفا التابع $\Omega(\tau)$ المعرف بالعلاقتين:

$$\Omega(\tau) = \int_0^\tau \lambda(t)\,dt \quad (0 \leqslant \tau < \infty), \; \Omega(-\tau) = \Omega(\tau) \tag{2}$$

حيث يرمز $\lambda(t)$ للتابع العكسي لِـ $\mu(\xi)$. هناك علاقة تربط التوابع الثنوية بمفهوم يونغ تتمثل في المتراجحة التالية المسماة متراجحة يونغ (16.9 ـ ط):

$$x\tau \leqslant M(x) + \Omega(\tau) \quad (x > 0, \quad \tau > 0) \tag{3}$$

نظرية. إذا كان $\varphi(x)$ تابعاً مستمرا بتقطع يجعل التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{M(x)}\,dx \tag{4}$$

منتهياً فإن محولة فوريى $\psi(s)$ للتابع $\varphi(x)$ تابع تحليلى صحيح يحقق المتراجحة:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant C e^{\Omega(\tau)} \tag{5}$$

البرهان. اما كوْن $\psi(s)$ تابعا تحليليا صحيحا فينتج من 22.15 ـ ب ثم لدينا:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i(\sigma+i\tau)x}\,dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{M(x)} e^{|\tau||x|} e^{-M(x)}\,dx.$$

نطبق على الاس متراجحة يونغ (3) فنحصل على:

$$|x||\tau| - M(x) \leqslant \Omega(\tau)$$

ومنه:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant e^{\Omega(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{M(x)}\,dx = C e^{\Omega(\tau)}$$

وهو ما يثبت النظرية.

اذا اخترنا مثلا تابعا $\varphi(x)$ يحقق الشرط:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, e^{\frac{1}{p}|x|^p}\,dx < \infty, \quad p > 1 \; .$$

نجد التابع الموافق له $\psi(s)$ يحقق المتراجحة:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant C e^{\frac{1}{q}|\tau|^q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

لأن $\frac{1}{q}x^q$ هو التابع الثنوي بمفهوم يونغ لـِ $\frac{1}{p}x^p$ (16.9 ـ ط). نشير الى ان العددين p وَ q اكبر من 1 لكنهما يتغيران في اتجاهين متعاكسين: عندما يتزايد p يتناقص q ولما $p \to \infty$ فإن $q \to 1$.

42.15 نفرض اخيرا ان الجداء $\varphi(x)$ في كل تابع متزايد لـِ $|x|$ يقبل المكاملة. من السهل ان نرى بأن التوابع ذات الحوامل المحدودة $\varphi(x)$ (أي التوابع المنعدمة اينما كان تقريبا خارج مجال $|x| \leqslant a$) هي وحدها التي تتمتع بهذه الخاصية. لنفرض اذن ان $\varphi(x)$ منعدم من اجل $|x| \geqslant a$. عندئذ تكون محولة فوريي: $\psi(s) = \int_{-a}^{a} \varphi(x) e^{-isx} dx$

تابعا تحليليا صحيحا لـِ s يقبل في مستوى العناصر s المتراجحة التالية:

$$|\psi(\sigma + i\tau)| \leqslant \int_{-a}^{a} |\varphi(x)| e^{|\tau||x|} dx \leqslant Ce^{a|\tau|} \quad (1)$$

حيث $C = \int_{-a}^{a} |\varphi(x)| dx$ ، يسمى تابع تحليلي $\psi(s)$ يحقق المتراجحة (1) **تابعا صحيحا من النمط الاسي المنتهي** $\leqslant a$.

وهكذا بقدر ما تكون سرعة تناقص $\varphi(x)$ عند اللانهاية كبيرة بقدر ما تكون محولة فوريي $\psi(\sigma)$ « مرنة ». بالإنطلاق من التوابع $\psi(\sigma)$ المستمرة مررنا بالتوابع التي تقبل عدة مشتقات ثم القابلة للإشتقاق لانهائيا ثم التحليلية في شريط، وفي كل المستوى ووصلنا الى التوابع التحليلية من النمط الاسي المنتهي. لا يمكن ان نجد تابعا يؤول الى الصفر في الاتجاهين على المحور الحقيقي، اكثر « مرونة » من التوابع الاخيرة (لاحظ اننا نعلم ان كل محولة فوريي لتابع قابل للمكاملة يتمتع بهذه الخاصية)؟ نعلم انه لا يوجد اي تابع تحليلي صحيح غير منعدم

من نمط اسي منته ويؤول الى الصفر على محور الفاصلات ويتزايد في المستوى بسرعة اقل من سرعة $e^{a|\tau|}$ من اجل كل $a > 0$ (راجع التمرين 24 من الفصل 10).

15 .52 . الآن، وبدل شروط التناقص المتزايد في السرعة، نفرض على التابع $\varphi(x)$ ان يكون مرنا اكثر فاكثر. من حقنا حسب نتائج 15 .12 ـ 15 .42 ان نتوقع خضوع محولة فوريي تابع $\varphi(x)$ الى شروط تناقض يتزايد اكثر فاكثر.

نفرض ان تابعا قابلا للمكاملة مطلقا $\varphi(x)$ مستمر وقابل لمشتق مستمر بتقطع وقابل للمكاملة ايضا على المحور $-\infty < x < \infty$. ينتج من ذلك بادىء ذي بدء ان التابع:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(\xi)\, d\xi$$

له نهاية لما $x \to \infty$، وهذه النهاية منعدمة لأن لولاه لما كان $\varphi(x)$ قابلا للمكاملة. الامر كذلك فيما يخص الحالة . ثم نجد بالمكاملة بالتجزئة:

$$F[\varphi'] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\, e^{-ix\sigma}\, dx = \varphi(x)\, e^{-ix\sigma}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\sigma}\, dx$$

يتبين مما سبق أن الحد الاول من اليمين منعدم؛ لدينا المساواة:

$$F[\varphi'] = i\sigma F[\varphi]$$

بعبارة اخرى فإن اشتقاق التابع $\varphi(x)$ يوافق ضرب التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi]$ في $i\sigma$. بما ان التابع $F[\varphi'(x)]$ بصفته محولة فوريي تابع قابل للمكاملة، تابع لِـ σ محدود (ويؤول نحو الصفر لما $|\sigma| \to \infty$) فإن لدينا العلاقة التالية بخصوص $F[\varphi(x)]$:

$$F[\varphi] = \frac{|F[\varphi'(x)]|}{|\sigma|} \leqslant \frac{c}{|\sigma|}$$

وهكذا يتضح في هذه الحالة ان التابع $\psi(\sigma)$ لا يؤول الى الصفر لما $|\sigma| \to \infty$ فحسب بل يؤول بسرعة تفوق سرعة

$1/|\sigma|$. فإن كانت المشتقات المتوالية، بما فيها المشتق من الرتبة m ، للتابع $\varphi(x)$ قابلة للمكاملة مطلقا فإننا نحصل بمواصلة العملية على:

$$F[\varphi^{(k)}(x)] = (i\sigma)^k F[\varphi] \quad (k = 0, 1, \ldots, m) \qquad (1)$$

لدينا، كما هو الحال اعلاه:

$$F[\varphi] = \frac{|F[\varphi^{(k)}(x)]|}{|\sigma|^k} \leqslant \frac{c}{|\sigma|^k} \qquad (2)$$

إذن بقدر ما يكون للتابع $\varphi(x)$ مشتقات قابلة للمكاملة بقدر ما يكون اسرع التناقص نحو الصفر عند اللانهاية لمحولة فوريي.

بصفة خاصة عندما يكون التابع $\varphi(x)$ مرنا بكفاية فإن محولة فوريي هذا التابع تقبل ايضا المكاملة مطلقا. نرى من (2) ان وجود φ ، φ' ، φ'' وقابليتها للمكاملة المطلقة توفر شرطا كافيا لذلك.

إذا كان $\varphi^{(k)}(x)$ موجودا وقابلا للمكاملة مطلقا من اجل كل $k = 0, 1, 2, \ldots$ فإن التابع $\psi(\sigma)$ يتناقص، لما $|\sigma| \to \infty$، بسرعة تفوق سرعة كل تابع $1/|\sigma|^k$.

62. 15 . أ . نفرض الآن ان التابع $\varphi(x)$ لا يقبل الاشتقاق لانهائيا فحسب بل انه تابع تحليلي في شريط $|y| \leqslant b$ من المستوى ذي المتغير العقدي $z = x + iy$. نفرض اضافة الى ذلك وجود تابع $\Phi(x)$ بحيث:

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,dx < \infty \qquad (1)$$

كما نفرض من اجل كل y $|y| \leqslant b$ ان:

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant \Phi(x) \qquad (2)$$

سنرى (في ج) ان محولة فوريى التابع $\varphi(x)$ هو تابع متناقص تناقصا اسياً.

ب . نبرهن في البداية على التوطئة التالية الخاصة بالتوابع التحليلية:

توطئة. إذا كان تابع $f(z)$ تحليليا في الشريط $|y|<b$ ، وحقق فيه المتراجحة:

$$|f(x+iy)| \leqslant \Phi(x) \tag{3}$$

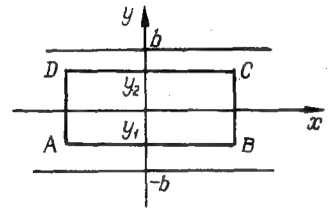
(حيث $\Phi(x)$ تابع يحقق الشرطين (1))، فإن التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)\,dx \tag{4}$$

لا يتعلق بـ y ، $|y|<b$.

البرهان. ينتج وجود التكامل (4) مباشرة من استمرار التابع $f(x+iy)$ بالنسبة لـ x ومن التقديرات (1) وَ (3) ليكن الآن y_1 و y_2 عددين كيفيين بحيث $y_1<y_2$ ، من المجال $(-b, b)$. نعتبر الحافة المغلقة: $L = ABCD$ المبينة في الرسم 1.15 . من نظرية كوشي 23.10 لدينا:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_A^B f(z)\,dz + \int_B^C f(z)\,dz + \int_C^D f(z)\,dz + \int_D^A f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$



الرسم 1.15

لتكن $-R$ وَ R فاصلتين النقطتين A وَ B . عندئذ:

$$\left|\int_B^C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(z)|\,dz \leqslant \int_{y_1}^{y_2} \Phi(R)\,dy = \Phi(R)(y_2-y_1)$$

تؤول هذه الكمية الى 0 لما $R \to \infty$. كما هو الحال في التكامل:

$$\int_D^A f(z)\,dz$$

إن للتكامل المتبقيين نهايتين لما $R \to \infty$ هو

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_2)\,dx \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_1)\,dx$$

بالإنتقال في المساواة (5) الى النهاية لما $R \to \infty$ نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_2)\,dx$$

وهو المطلوب.

ج . نظرية . باعتبار الفرض أ ، فإن محولة فوريي $\psi(\sigma)$ للتابع $\varphi(x)$ يحقق المتراجحة

$$|\psi(\sigma)| \leqslant Ce^{-b|\sigma|}$$

البرهان . نطبق التوطئة ب على التابع التحليلي:

$$f(z) = \varphi(z)\,e^{-i\sigma z}$$

التي تتحقق من اجلها المتراجحة (3) اذا عوضنا فيها

بـ : $\Phi(x)\,e^{\sigma|b|}$. بفضل التوطئة، نجد :

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy)\,e^{-i\sigma(x+iy)}\,dx \qquad (6)$$

من اجل كل $|y| < b$. بتثبيت y نحصل على التقدير :

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|\,e^{\sigma y}\,dx = e^{\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|\,dx \leqslant e^{\sigma y}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,dx$$

بالإنتقال هنا الى النهاية لما $y \to -b\,\mathrm{sgn}\,\sigma$ نجد :

$$|\psi(\sigma)| \leqslant Ce^{-|\sigma|b}.$$

وهو المطلوب.

د . إذا كان التابع $\varphi(x)$ تحليليا في كل المستوى $z = x + iy$ وإذا تمكنا من الاشارة، من اجل كل شريط $|y| < b$ ، الى تابع $\Phi(x)$ يحقق الشروط (1) وَ (2) (يمكن للتابع $\Phi(x)$ ان يتعلق بـ b)، فإن تطبيق

النظرية ج يجعلنا نرى ان محولة فوريى $\psi(\sigma)$ للتابع $\varphi(x)$ يحقق متراجحة من الشكل:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant C_b e^{-|\sigma| b}$$

من اجل كل b .

72. 15 . نعتبر بعد ذلك تابعا تحليليا صحيحا $\varphi(x)$ يقبل في كل شريط $|y| \leqslant b$ التقدير:

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant e^{\Omega(y)} \Phi_b(x)$$

مع
$$\Omega(y) = \int_0^y \lambda(\eta)\, d\eta \quad (0 \leqslant y < \infty), \quad \Omega(-y) = \Omega(y)$$

حيث $\lambda(\eta)$ تابع مستمر ومتزايد يحقق $\lambda(0) = 0$ و $\lambda(\infty) = \infty$.
نفرض، من اجل كل b ، ان التابع $\Phi_b(x)$ يحقق الشرطين 62. 15(1) في الشريط $|y| \leqslant b$.

ليكن $M(\sigma)$ الثنوي بمفهوم يونغ للتابع $\Omega(y)$:

$$M(\sigma) = \int_0^\sigma \mu(\xi)\, d\xi$$

حيث $\mu(\xi)$ هو التابع العكس لِـ $\lambda(\eta)$.

نظرية. ضمن الفرض هذا تكون محولة فوريي $\psi(\sigma)$ للتابع $\varphi(x)$ تحقق المتراجحة:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant C e^{-M(\sigma)}$$

البرهان. لدينا حسب 62. 15(6):

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy) e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx$$

وهذا من اجل كل y . ينتج من ذلك التقدير $(b > |y|)$:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Omega(y)} \Phi_b(x) e^{\sigma y}\, dx = C_b e^{\Omega(y)+\sigma y} \tag{1}$$

نختار اشارة وطويلة y بحيث يكون $\sigma y = -|\sigma|\,|y|$ وبحيث تصبح متراجحة يونغ المساواة:

$$|\sigma|\,|y| = M(\sigma) + \Omega(y)$$

بعد هذا ينتج من (1) ان:

$$|\psi(\sigma)| \leqslant C_b e^{-M(\sigma)}$$

بذلك ينتهي البرهان.

82. 15 . ليكن اخيرا $\varphi(x)$ تابعا تحليلياً صحيحا يحقق المتراجحة:

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant \Phi(x)\, e^{a|y|}$$

حيث يخضع التابع $\Phi(x)$ الى الشرطين 62. 15(1) (ولا يتعلق بـ y).

نظرية. ضمن الفرض الوارد، تنعدم محولة فوريي $\psi(\sigma)$ التابع $\varphi(x)$ من اجل $|\sigma| > a$.

البرهان. لدينا حسب 62. 15(6):

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+iy)\, e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx \qquad (1)$$

وهذا من اجل كل y . نثبّت اشارة y بحيث يكون $\sigma y = -|\sigma|\,|y|$. ينتج عندئذ من (1):

$$|\psi(\sigma)| \leqslant e^{\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, e^{a|y|}\, dx \leqslant C e^{(a-|\sigma|)|y|} \qquad (2)$$

ليكن $|\sigma| > a$. بجعل $|y|$ يؤول الى ∞ في المتراجحة (2) نحصل على $\psi(\sigma) = 0$ ، وهو المطلوب.

92. 15 . من الواضح ان النظريات 52. 15 ـ 82. 15 ليست بالضبط القضايا العكسية للنظريات 12. 15 ـ 42. 15 ، فهي تتطلب فروضا اضافية (مثلا وجود تابع $\Phi(x)$ يتمتع بالخاصيات 62. 15(1)، (2)). السؤال المطروح يتعلق بانشاء اصناف توابع $\varphi(x)$ يمكن تعيين اصناف محولاتها لفوريي $\psi(\sigma)$ تعيينا كاملا. نستطيع انشاء بعض هذه الاصناف بواسطة النظريات 12. 15 ـ 82. 15 .

أ. الصنف S . نعتبر المجموعة S المؤلفة من كل التوابع القابلة للإشتقاق لانهائيا $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ التي تحقق من اجل كل k وَ q (حيث $k,\ q = 0, 1, 2, \ldots$) متراجحة من الشكل:

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{kq} \qquad (1)$$

حيث C_{kq} ثابت (يتعلق باختيار التابع $\varphi(x)$).

إن كل تابع $x^k\varphi^{(q)}(x)$ محدود على المحور x ويقبل ايضا المكاملة على كل المحور لأن المتراجحة

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{k+2,\,q}}{x^2}$$

قائمة بفضل المتراجحة (1) بحيث ان:

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leqslant \min\left\{C_{kq},\ \frac{C_{k+2,\,q}}{x^2}\right\} \leqslant \frac{C^*_{kq}}{1+x^2}$$

حيث C^*_{kq} ثابت جديد.

ثم إن كل تابع $x^k\varphi(x)$ يقبل الاشتقاق لانهائيا مع $\varphi(x)$ ، كما ان كل مشتق له يقبل المكاملة على محور العناصر x لان هذه المشتقات تكتب على شكل عبارات خطية لتوابع قابلة للمكاملة $x^j\varphi^{(q-j)}(x)$ حسب دستور ليبنيتز 21.8 (3).

إن التابع $\psi(\sigma) = F[\varphi(x)]$ يقبل الاشتقاق لانهائيا بفضل 12.15 . باستخدام الدساتير 12.15 (2) وَ 52.15 (1) يمكن كتابة:

$$F[(x^k\varphi(x))^q] = (-i)^q\, i^k\sigma^k\psi^{(q)}(\sigma)$$

نلاحظ ان الطرف الثاني هنا، بصفته محولة فوريى تابع قابل للمكاملة $(x^k\varphi(x))^q$ ، محدود مهما كان k وَ q :

$$|\sigma^k\psi^{(q)}(\sigma)| \leqslant B_{kq}$$

إذن إذا كان $S \ni \varphi(x)$ فإن $S \ni \psi(\sigma)$. وبالعكس، ليكن $S \ni \psi(\sigma)$ ؛ لنثبت ان هذا التابع هو محولة فوريى تابع $S \ni \varphi(x)$. نضع

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)\,e^{i\sigma x}\,d\sigma$$

إن التابع $2\pi\varphi(-x)$ هو محولة فوريى التابع $\psi(\sigma)$ ، ولذا ينتمي الى S . ومنه يتضح ان لدينا ايضا $S \ni \varphi(x)$. حسب دستور القلب:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\varphi(-x)\,e^{i\sigma x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\sigma x}\,dx$$

وبالتالي فإن $\psi(\sigma)$ هو محولة فوريى التابع $\varphi(x)$ ، وهو المطلوب.

وهكذا يتبين ان تحويل فوريى F يطبق الصنف S على كل الصنف S

ب . لتكن $m_{kq}\ (k, q = 0, 1, 2, \ldots)$ متتالية مزدوجة من الثوابت. يتشكل الصنف $S_{\langle m_{kq}\rangle}$ تعريفا من كل التوابع القابلة للإشتقاق لانهائيا $\varphi(x)\ (-\infty < x < \infty)$ التي تحقق المتراجحات:

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leqslant CA^k B^q m_{kq} \quad (k, q = 0, 1, 2, \ldots)$$

حيث A ، B ، C ثوابت يمكن ان تتعلق بالتابع $\varphi(x)$

يتبين ضمن بعض الشروط المتعلقة بالمتتالية m_{kq} ان لدينا الدستور:

$$F(S_{\langle m_{kq}\rangle}) = S_{\langle m_{kq}\rangle}\ ^{*)}$$

ج . الصنف W_M والصنف W^Ω . ليكن $M(x)$ وَ $\Omega(\tau)$ تابعين ثنويين بمفهوم يونغ فيما بينهما (32.15). يتشكل الصنف W_M تعريفاً من كل التوابع القابلة للإشتقاق لانهائيا $(-\infty < x < \infty)\ \varphi(x)$ التي تحقق المتراجحات: $|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q e^{-M(x)} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots)$

إذا كان $\psi(x)$ هو محولة فوريى تابع $\varphi(x)$ فإن $(is)^q\psi(s)$ محولة فوريى التابع $\varphi^{(q)}(x)$ (52.15). لدينا بفضل 32.15 المتراجحات:

$$|s^q \psi(\sigma + i\tau)| \leqslant C'_q e^{\Omega(\tau)} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

نرمز بـ W^Ω لصنف كل التوابع التحليلية الصحيحة $\psi(s)$ التي تحقق المتراجحات (2). نرى ان $F(W_M) \subset W^\Omega$. ليكن الآن $\psi(s)$ تابعا كيفيا من W^Ω . انطلاقا من المتراجحة (2) ومن نفس المتراجحة المحصل عليها عند تعويض q بـ $q+2$ ، يأتي:

$$|s^q \psi(\sigma + i\tau)| \leqslant e^{\Omega(\tau)} \min\left\{C'_q, \frac{C'_{q+2}}{|s|^2}\right\} = \Phi_{\tau q}(\sigma)\, e^{\Omega(\tau)}$$

حيث:

$$\Phi_{\tau q}(\sigma) = \min\left\{C'_q, \frac{C'_{q+2}}{|\sigma + i\tau|^2}\right\} \leqslant \frac{C_{\tau q}}{1 + |\sigma|^2}$$

(*) راجع [23]

تابع قابل للمكاملة. يؤدي تطبيق النظرية 15 .72 الى المتراجحة:

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_q'' e^{-M(x)}$$

اي ان $F[W^\Omega] = W_M$. في الاخير نرى ان صورة الصنف W_M بواسطة تحويل فوريي هو الصنف W^Ω وان صورة الصنف W^Ω هو W_M .

§ 15 .3 . امثلة وتطبيقات

نعتبر في البداية، في 15 .13 ـ 15 .23 بعض الامثلة في محولات فوريي.

15 .13 . كنا حسبنا محولة فوريي كسر ناطق:

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

حيث $1 - n < m$ في 11 .23 ـ ب بطريقة المكاملة على طول حافة باستعمال النظرية 15 .62 ـ جـ وتحليلية التابع $Q(z)$ في شريط $|y| \leqslant b$ (لا يحوي جذورا للمقام) يمكننا القول ان $F[Q(x)]$ يتناقص اسياً من اجل $\infty \to |\sigma|$ ؛ نلاحظ اننا لم نعد في حاجة لذلك ما دمنا قد حسبنا $F[Q(x)]$ بشكل صريح.

15 .23 . لنبحث عن محولة فوريي $\psi(\sigma)$ تابع $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ ، $a > 0$ إن هذا التابع يقبل التمديد تحليليا في كل المستوى ولدينا التقدير:

$$|e^{-az^2}| = |e^{-a(x+iy)^2}| = e^{ay^2} e^{-ax^2}$$

وبالتالي يمكن الانتقال، بفضل 15 .62 ـ ب، في المستوى ذي العناصر z ، من محور العناصر x الى اي مستقيم مواز له وذلك بغية حساب محولة فوريي:

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ay^2 + \sigma y - 2aixy - i\sigma x}\, dx =$$

$$= e^{ay^2 + \sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ix(2ay + \sigma)}\, dx.$$

نضع $y = -\sigma/(2a)$ ؛ عندئذ $ay^2 + \sigma y = -\sigma^2/(4a)$ ولدينا حسب الدستور 15 .65 ـ (2):

$$\psi(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = -e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

بصفة خاصة نحصل من اجل $\varphi(x)=e^{-x^2/2}$ $(a=1/2)$ على:
. $\psi(\sigma)=\sqrt{2\pi}\, e^{-\sigma^2/2}$

15 .33 . محولة فوريي وجداء التزويج. كنا عرّفنا في 11 .84 جداء تزويج تابعين $f(x)$ وَ $g(x)$ معرفين على $-\infty<x<\infty$ على انه التابع:

$$h(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \qquad (1)$$

إذا كان $f(x)$ وَ $g(x)$ مستمرين ومحدودين وقابلين للمكاملة مطلقا على $(-\infty,\infty)$ فإن $h(x)$ موجود من اجل كل x ومستمر ايضا ومحدود وقابل للمكاملة مطلقا على $(-\infty,\infty)$؛ بالإضافة الى ذلك لدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \qquad (2)$$

نطبق النظرية الخاصة بجداء التزويج بتعويض $f(x)$ وَ $g(x)$ بـ $f(x)\, e^{-i\sigma x}$ وَ $g(x)\, e^{-i\sigma x}$ على التولي. إن جداء تزويج هذين التابعين هو:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\sigma\xi} g(x-\xi)\, e^{-i\sigma(x-\xi)}\, d\xi = e^{-i\sigma x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi.$$

تعطي المساواة (2) حينئذ:

$$F[f*g]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi\right\} dx =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx\cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx = F[f]\cdot F[g],$$

بعبارة اخرى فإن الفروض الواردة اعلاه على التابعين $f(x)$ وَ $g(x)$ تستلزم ان محولة فوريي جداء تزويج $f(x)$ وَ $g(x)$ هو جداء محولتيْن فوريي لهذين التابعين.

15 .43 . حل معادلة الحرارة. نبحث عن حل $u(x, t)$ لمعادلة الحرارة $(-\infty<x<\infty$ ، $t\geqslant 0)$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

يطابق التابع المعطى $u_0(x)$ من اجل $t = 0$. يتمثل المعنى الفيزيائي للمسألة المطروحة في تعيين درجة حرارة المحتوى المتجانس الوحيد البعد (لقضيب غير منته) في كل لحظة $t > 0$ اذا علمنا درجة حرارته في اللحظة $t = 0$. نشترط ما يلي:

1) التوابع $u(x, t)$ ، $u_x(x, t)$ ، $u_{xx}(x, t)$ مستمرة وقابلة للمكاملة مطلقا عند x من اجل $-\infty < x < \infty$ ومن اجل كل $0 \leqslant t$ مثبت.

2) يقبل التابع $u_t(x, t)$ في كل مجال $0 \leqslant t \leqslant T$ حادا اعلى قابة للمكاملة

$$|u_t(x, t)| \leqslant \Phi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\, dx < \infty$$

نطبق على المعادلة (1) تحويل فوريي بضربها في $e^{-i\sigma x}$ وبالمكاملة بعد ذلك بالنسبة لـ x من $-\infty$ الى ∞. بفضل الشرط 2) وَ 54.11 ـ أ وَ 74.11 ـ أ يمكن كتابة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx = v_t(\sigma, t)$$

حيث:

$$v(\sigma, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

هو محولة فوريي الحل المطلوب $u(x, t)$. لدينا من الشرط 1) والدستور 52.15 (1):

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\sigma^2 F[u] = -\sigma^2 v(\sigma, t)$$

نصل الى المعادلة التفاضلية العادية:

$$v_t(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t)$$

التي يجب ان نجد حلا لها يطابق، من اجل $t = 0$:

$$v_0(\sigma) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\sigma x}\, dx$$

من الواضح ان للحل المطلوب الشكل:

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma)$$

علمنا (راجع 23.15 حيث ينبغي وضع $a = 1/(4t)$) ان:

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]$$

لدينا حسب الدستور الخاص بمحولة فوريى جداء تزويج (33.15(2)):

$$v(\sigma, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] F[u_0] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right]$$

وبما ان $v(\sigma, t) = F[u(x, t)]$ فإننا نصل الى:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u_0(x-\xi)\, d\xi$$

يسمى الدستور المحصل عليه تكامل بواسون (Poisson). نبين ضمن نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية ان الحل السابق وحيد في صنف واسع من التوابع [11].

§ 4.15 . تحويل لابلاس

14.15 . ليكن $\varphi(x)$ تابعا معطى من اجل $\infty > x > -\infty$ مستمراً بتقطع بحيث يكون $e^{-\gamma x}\varphi(x)$ (حيث γ حقيقي) قابلا للمكاملة مطلقا. عندئذ فإن محولة فوريى التابع $\varphi(x)$ التي قد لا تكون موجودة بالمفهوم الاول لهذا المصطلح، يمكن ان تكون موجودة من اجل بعض العناصر s العقدية؛ بصفة خاصة فإن

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ix\sigma} e^{x\tau}\, dx$$

موجودة على المستقيم $\tau = -\gamma$. نرى على هذا المستقيم أن $\psi(s)$ هو محولة فوريى التابع $\varphi(x)\, e^{x\tau}$ القابل للمكاملة مطلقا.

تتحقق اهم حالة ضمن الشرط:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} &|\varphi(x)| < Ce^{\alpha x} \quad \text{pour } x \geqslant 0, \\ &\varphi(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0. \end{aligned}\right\}$$

نلاحظ ان محولة فوريى هنا:

$$(2) \qquad \psi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, e^{x\tau} e^{-ix\sigma}\, dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ixs}\, dx$$

موجودة هنا من اجل $\tau > -\alpha$ أي في نصف المستوى ذي المتغير العقدي $s = \sigma + i\tau$ الواقع تحت المستقيم $\tau = -\alpha$. نجري في الدستور (2) تبديلا للمتغير هو $is = p$. إذا رسم s نصف المستوى $\operatorname{Im} s < -\alpha$ فإن p يرسم نصف المستوى $\operatorname{Re} p > \alpha$. إن التابع:

$$\Phi(p) \equiv \psi(s) = \int_0^\infty \varphi(x)\, e^{-px}\, dx$$

معرف وتحليلي في نصف المستوى $\operatorname{Re} p > \alpha$ ؛ نلاحظ ان هذا التابع يؤول الى الصفر على كل مستقيم عمودي من نصف المستوى المعتبر عندما $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$ ، بما ان هذا التقارب منتظم على كل مجال مغلق منته من القيم $\operatorname{Re} p$. من جهة اخرى لدينا التقدير التالي في نصف المستوى $\operatorname{Re} p > \alpha$ بخصوص التابع $\Phi(p)$ (حيث $p = \xi + i\eta$):

$$|\Phi(p)| \leqslant \int_0^\infty |\varphi(x)|\, e^{-\xi x}\, dx \leqslant C \int_0^\infty e^{(\alpha-\xi)x}\, dx = \frac{C}{\xi - \alpha}$$

ينتج من ذلك ان التابع $\Phi(p)$ محدود في كل نصف مستوى $\operatorname{Re} p \geqslant \beta > \alpha$ وانه يؤول الى الصفر لما $\xi \to \infty$.

يسمى التابع $\Phi(p)$ **محولة لابلاس** التابع $\varphi(x)$. نرى ان لابلاس لا تختلف عن تحويل فوريي (المعتبر في الساحة العقدية) الاّ بدوران ذي $90°$ في مستو المتغير العقدي.

24. 15 . أ . تقدم النظرية التالية شروطا كافية (لكنها بعيدة عن ان تكون ضرورية) لكي يكون تابع $\Phi(p)$ معطى محولة فوريي تابع $\varphi(x)$ يحقق الشروط 15 .14(1).

نظرية . ليكن $\Phi(p)$ ، ($p = \xi + i\eta$)، تابعا يتمتع بالشرطين التاليين:

1) التابع تحليلي في نصف مستو $\operatorname{Re} p > \gamma_0 \geqslant 0$،

2) يوجد ثابت C وتابع $B(\eta)$ موجب وقابل للمكاملة على المحور $-\infty < \eta < \infty$ بحيث يكون لدينا التقدير التالي من اجل كل $\xi > \gamma_0$:

$$\left|\Phi(p) - \frac{C}{p}\right| \leqslant B(\eta)$$

عندئذ يكون $\Phi(p)$ محولة لابلاس تابع $\varphi(x)$ مستمر بتقطع ينعدم من اجل $x<0$ ، ومستمر من اجل $x>0$ ويحقق المتراجحة:

$$|\varphi(x)|<Ce^{\gamma_0 x}$$

من اجل $x>0$.

البرهان. من الواضح ان التابع C/p محولة لابلاس التابع $\varphi_0(x)$ المساوي لِـ 0 من اجل $x<0$ ولِـ C من اجل $x>0$. يحقق التابع $\varphi_0(x)$ متطلبات النظرية. يمكن بعد عزل هذا التابع افتراض ان التابع $\Phi(p)$ نفسه يحقق من اجل $\xi>\gamma_0$ المتراجحة:

$$|\Phi(p)|\leqslant B(\eta)$$

نعرف في هذه الحالة التابع $\varphi(x)$ بالدستور:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Phi(p)e^{px}\,dp\quad(\gamma>\gamma_0)\tag{1}$$

باستخدام دستور كوشي (بصفة مماثلة لِـ 62.15 ـ ب) واعتمادا على الشرطين 1) و 2) من اليسير اثبات عدم تعلق التكامل (1) بـ γ . من جهة اخرى، لدينا المتراجحة:

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\xi+i\eta)|e^{\gamma x}\,d\eta\leqslant\frac{B}{2\pi}e^{\gamma x}$$

عندما يكون $x>0$ ، نحصل في حالة جعل γ يؤول الى γ_0 على:

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{\gamma_0 x}$$

اما فيما يخص $x<0$ فنجعل γ يؤول الى $+\infty$، نحصل عندئذ على $\varphi(x)\equiv 0$.

إذا وضعنا الدستور (1) على الشكل:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi+i\eta)e^{(\xi+i\eta)x}i\,d\eta=\frac{e^{\xi x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi+i\eta)e^{i\eta x}\,d\eta$$

فإننا نرى بان $2\pi\varphi(-x)e^{\xi x}$ محولة فوريي ، بالنسبة للمتغير η ، للتابع القابل للمكاملة مطلقا $\Phi(\xi+i\eta)$ ، (ξ مثبت). من دستور القلب

يأتي:

$$(2) \quad \Phi(\xi+i\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\varphi(-x)\,e^{(\xi+i\eta)x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-px}\,dx$$

بحيث ان $\Phi(\xi+i\eta)$ يمثل فعلا محولة لابلاس التابع $\varphi(x)$. يلعب الدستور (1) دورا هاما في نظرية تحويل لابلاس، يسمى هذا الدستور دستور القلب للابلاس.

ب . لنر ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في التابع $\varphi(x)$ كي تحقق محولة لابلاس لهذا التابع فرض النظرية أ. لنفرض ان $\varphi(x)$ يقبل الاشتقاق $m-1$ مرة بإستمرار ومشتقة ذو الرتبة موجود ومستمر بتقطع بحيث تحقق هذه المشتقات الشرط 14.15 (1). عندئذ عندما نكامل المساواة (2) m مرة بالتجزئة نحصل من اجل $\xi=\operatorname{Re}p\geqslant\gamma>\alpha$ على:

$$|\Phi(p)|=\left|\frac{1}{p^m}\int_0^{\infty}\varphi^{(m)}(x)\,e^{-px}\,dx\right|\leqslant\frac{C}{|p|^m}=$$

$$(3) \quad =\frac{C}{|\xi^2+\eta^2|^{m/2}}\leqslant\frac{C}{(\gamma^2+\eta^2)^{m/2}}$$

نرى اذن ان فرض النظرية أ محقق اذا كان $m=2$. وبالتالي فإن وجود المشتق الثاني المستمر بتقطع للتابع $\varphi(x)$ يضمن توفر فرض النظرية أ .

15 .34 . يُساعد تحويل لابلاس في كثير من الاحيان على حل المعادلات التفاضلية العاديلا او ذات المشتقات الجزئية الموافقة لجمل غير مستقرة؟ في مثل هذه المسائل فإن التابع المجهول $f(t)$ منعدم من اجل $t<0$ ، ويحسب، من اجل $t>0$ ، ان تحقق معادلة وبعض الشروط الابتدائية من اجل $t=0$.

نعتبر في البداية معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة:

$$(1) \quad a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny(t)=b(t)$$

نستكملها بالقيم المعطاة:

$$(2) \quad \begin{aligned} &y(0)=y_0,\\ &y'(0)=y_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &y^{(n-1)}(0)=y_{n-1},\end{aligned}$$

حيث $b(t)$ تحقق الشروط 14.15 (1). نضرب المعادلة (1) في e^{-pt} ونكامل بالنسبة لِـ t من 0 الى ∞. نرمز بـ:

$$Y(p)=\int_0^\infty y(t)\,e^{-pt}\,dt$$

لمحولة لابلاس التابع $y(t)$. حينئذ نجد بالمكاملة بالتجزئة:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty y'(t)\,e^{-pt}\,dt=y(t)\,e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty y(t)\,e^{-pt}\,dt=\\
&\qquad=-y_0+pY(p),\\
&\int_0^\infty y''(t)\,e^{-pt}\,dt=y'(t)\,e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty y'(t)\,e^{-pt}\,dt=\\
&\qquad=-y_1+p(-y_0+pY(p))=\\
&\qquad=-y_1-py_0+p^2Y(p),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_0^\infty y^{(n)}(t)\,e^{-pt}\,dt=y^{(n-1)}(t)\,e^{-pt}\Big|_0^\infty+\\
&\qquad+p\int_0^\infty y^{(n-1)}(t)\,e^{-pt}\,dt=\\
&\qquad=-y_{n-1}+p(-y_{n-2}-py_{n-3}-\dots\\
&\qquad\dots-p^{n-2}y_0+p^{n-1}Y(p))=\\
&\qquad=-y_{n-1}-py_{n-2}-\dots\\
&\qquad\dots-p^{n-1}y_0+p^nY(p).
\end{aligned}\right.$$

بضرب كل معادلة من (3) في المعامل a_k الموافق لها وبالجمع نحصل على المعادلة ذات الشكل:

$$R_0(p)+R(p)\,Y(p)=B(p)$$

حيث $R_0(p)$ كثير حدود لِـ p درجته لا تتجاوز $n-1$ ، اما $R(p)$ فهو كثير حدود لِـ p درجته n ، وتمثل $B(p)$ محولة لابلاس التابع $b(t)$. نحصل فيا يخص التابع المجهول $Y(p)$ على معادلة جبرية مخصة بحل هذه المعادلة نجد:

$$Y(p)=\frac{B(p)-R_0(p)}{R(p)}$$

يحقق التابع $\frac{R_0(p)}{R(p)}$ فرض النظرية 15 .24 ـ ا، خاصة اذا وضعنا

$$C = \lim_{p\to\infty} \frac{pR_0(p)}{R(p)}$$

فإننا نجد ان:

$$\frac{R_0(p)}{R(p)} - \frac{C}{p} = \frac{pR_0(p) - CR(p)}{pR(p)}$$

كسر ناطق لـِ p حيث تتجاوز درجة المقام $n+1$ درجة البسط بوحدتين على الاقل لأن تعريف C يبين ان حدود البسط ذات الدرجة n تزول بالاختصار.

اما فيما يخص التابع $\frac{B(p)}{R(p)}$ فليس من المؤكد انه يحقق فرض النظرية 15 .24 ـ أ، لأن ذلك يتوقف عن طبيعة التابع $B(p)$. اذا كانت درجة كثير الحدود $R(p)$ اكبر من 1 يكفي ان يكون التابع $b(t)$ يحقق الشروط 15 .14(1) لأن $B(p)$ محدود، وإذا كانت درجة $R(p)$ تساوي 1 فإن المتراجحة 15 .24(3) تثبت انه يكفي ان يقبل التابع مشتقا مستمرا بتقطع يتمتع مع $b(t)$ بالشروط 15 .14(1).

إذا حقق التابع $\frac{B(p)}{R(p)}$ ايضاً فرض النظرية 15 .24 ـ أ فإن تطبيق هذه الاخيرة يؤدي بخصوص الحل $y(t)$ الى الدستور:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{B(p) - R_0(p)}{R(p)} e^{pt}\, dp \qquad (4)$$

إذا كان التابع $B(p)$ قابلا للتمديد تحليلياً في كل مستوى العناصر p (مع وجود نقاط شاذة منعزلة) فإننا نحسب عادة التكامل (4) بواسطة المكاملة على طول محيط باستخدام نظرية الرواسب كما فعلنا في حساب تكامل فوريى لتوابع كسرية. نلاحظ بخصوص $t > 0$ ان التابع e^{pt} محدود في نصف المستوى الايسر $(\text{Re}\, p < \gamma)$ وهو ليس كذلك في نصف المستوى الآخر، يجب اذن انشاء انصاف الدوائر التي تمثل جزءا من المحيط الواقع على يسار المستقيم $\text{Re}\, p = \gamma$ وليس على يمينه. يمكن اختيار γ اي عدد شريطة ان تكون كافة النقاط الشاذة للتابع $R(p)$ على يسار المستقيم $\text{Re}\, p = \gamma$.

15 .44 . مثال . نعتبر معادلة من الرتبة الثانية

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = b \sin kt, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

جذراها المميزان (71.13) هما العددان العقديان المترافقان (غير الحقيقيين) $\lambda = \alpha + i\beta$ وَ $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ حيث $\alpha < 0$.

تصف هذه المعادلة في الكهرباء التذبذبات القسرية في دائرة تحوي مقاومة ومكثف خاضعة لقوة ترددها k . إذا اجرينا تحويل لابلاس على هذه المعادلة نحصل على:

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)\, Y(p) = \int_0^\infty b \sin kt e^{-pt} dt = \frac{bk}{k^2 + p^2}$$

بحلها نجد:

$$Y(p) = \frac{bk}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

ثم من قانون القلب يأتي:

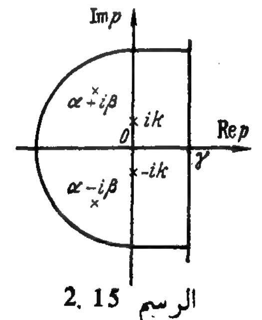
$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}\, dp}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

نضع:

$$f(p) = \frac{e^{pt}}{(a_0p^2 + a_1p + a_2)(k^2 + p^2)}$$

يقبل المقام اربعة جذور بسيطة عند النقاط $\pm ik$ وَ $\alpha \pm i\beta$. يمكن اختيار γ اي عدد موجب. لحساب التكامل نتمم المستقيم $\operatorname{Re} p = \gamma$ بنصف دائرة نأخذ نصف قطرها كبيراً بكفاية في نصف المستوى الايسر (الرسم 2.15)؛ نحصل عندئذ حسب نظرية الرواسب 34.10 :

$$y(t) = bk \{\operatorname{Res} f(p)|_{p=ik} + \operatorname{Res} f(p)|_{p=-ik} + \operatorname{Res} f(p)|_{p=\alpha+i\beta} + \operatorname{Res} f(p)|_{p=\alpha-i\beta}\}$$



الرسم 2.15

نحسب كل راسب حسب الدستور العام 10 .24(1) باعتبار الاقطاب البسيطة : $\operatorname{Res} \frac{A(p)}{B(p)}\Big|_{p=p_0} = \frac{A(p_0)}{B'(p_0)}$

اخيرا ، لدينا :

$$y(t) = bk\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\lambda^2+k^2)\,2i\beta a_0} - \frac{e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\bar{\lambda}^2+k^2)\,2i\beta a_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{ikt}}{(-a_0k^2+a_1ik+a_2)\,2ik} - \frac{e^{-ikt}}{(-a_0k^2-a_1ik+a_2)\,2ik}\right]$$

حصيلة ذلك هو تراكب تذبذب دوري تردده يساوي تردد القوة الخارجية وتذبذب متخامد تردده يساوي التردد الذاتي للنظام؛ تُعين سرعة التخاند بالكمية α ، اي بفاصلة الجذرين المميزين.

عندما يكون $\alpha = 0$ وَ $\beta = k$ فإننا نحصل على رنين. نأخذ حينئذ المعادلة الاولى الشكل :

$$y'' + k^2y = b \sin kt$$

وحلها هو

$$y(t) = \frac{bk}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}\,dp}{(p^2-k^2)^2}$$

تشكل النقطتان $p = \pm ik$ قطبين تضاعفهما 2 للتابع الواقع تحت التكامل.
بحساب الرواسب استنادا الى الدستور 10 .24(2) نجد :

$$y(t) = bk\left[e^{ikt}\left(-\frac{t^2}{4k^2}+\frac{1}{4ik^3}\right) + e^{-ikt}\left(-\frac{1}{4k^2}-\frac{1}{4ik^3}\right)\right] =$$
$$= \frac{bt}{2k}\cos kt - \frac{b}{2k^2}\sin kt$$

وهذا يمثل تذبذب سعة متزايدة لانهائياً.

15 .54 . يمكن تطبيق نفس الطرق على المعادلات ذات المشتقات الجزئية.

عند تطبيق تحويل لا بلاس تصبح المعادلة التفاضلية العادية المعتبرة معادلة جبرية بالنسبة للتابع المجهول، اما إذا احتوت المعادلة على المشتقات بالنسبة لـِ t وكذلك بالنسبة لـِ x ، y ، ... فإن تحويل لابلاس يزيل المشتقات بالنسبة لـِ t ويحتفظ بالمشتقات بالنسبة لـ x ، y ، ... .

نعتبر على سبيل المثال معادلة الحرارة $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ في مجال منته

مع الشروط $0 \leqslant x \leqslant l$ ، $u_x(0, t) = 0$ ، $u(l, t) = u_1$ ، $u(x, 0) = u_0$.
من وجهة النظر الفيزيائية فهذا يعني ان الحرارة لا تتسرب من النقطة $x = 0$
واننا نحتفظ بحرارة ثابتة u_1 عند النقطة $x = l$ بايراد حرارة من الخارج
$(t > 0)$ وان درجة الحرارة في اللحظة الابتدائية. ثابتة وتساوي u_0.

نطبق تحويل لابلاس بالنسبة لـ t فننتقل من التابع $u(x, t)$ الى التابع :

$$v(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt$$

نحصل بخصوص التابع $v(x, p)$ على المعادلة :

$$\frac{d^2 v(x, p)}{dx^2} - pv(x, p) = -u_0$$

مع الشرطين : $v_x(0, p) = 0$ و $v(l, p) = \frac{u_1}{p}$

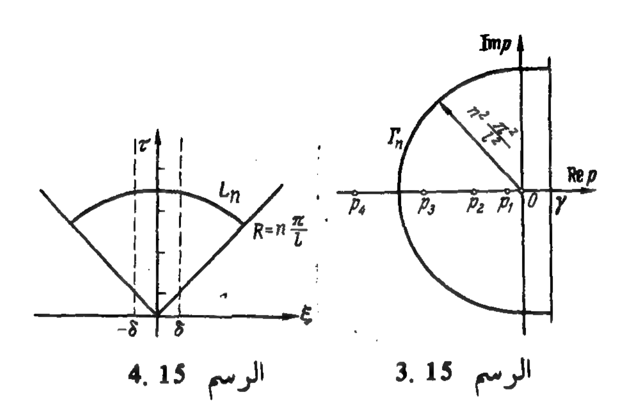
تلك هي معادلة من الرتبة الثانية حلها هو

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$$

ومنه :

$$u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}} \frac{dp}{p} \qquad (1)$$

إن التابع الواقع تحت التكامل متباين بالنسبة لـ p واقطابه هي
$p_0 = 0$ ، $p_n = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ (حيث $n = 1, 2, \ldots$).
سنبين أن التكامل يساوي المجموعة (غير المنتهي) لرواسب التابع الموافق له
عند كل هذه الاقطاب. للقيام بذلك نعتبر في نصف المستوى الايسر
نصف الدائرة Γ_n المتمركزة في مصدر الاحداثيات والتي نصف قطرها
$n^2\pi^2/l^2$ (الرسم 3.15)؛ إنها تمر بين قطبين متجاورين؛ سنبين ان النسبة
$\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ محدودة على كل نصف الدائرة، ومنه يتضح من توطئة
جوردان 23.11 ـ د ان التكامل على Γ_n يؤول الى الصفر لما n يؤول الى
∞ ، وبذلك يرد التكامل (1) كالمعتاد الى مجموع الرواسب.



الرسم 4.15 الرسم 3.15

بـدل اعتبـار النسبـة $\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}$ على نصـف الدائـرة Γ_n حيـث $|p|=n^2\pi^2/l^2$ يمكن استبدال $\sqrt{p}$ بـِ ζ وَ p بـِ ζ^2 واعتبار النسبة $\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}$ على ربع الدائرة L_n ذات نصف القطر $n\pi/l$ وذات زاوية قطبية متغيرة من $\pi/4$ الى $3\pi/4$ (الرسم 4.15). نضع $\zeta=\xi+i\tau$, لدينا $\tau>0$ وَ $|\xi|<\tau$ وَ

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2=\left|\frac{\operatorname{ch} x(\xi+i\tau)}{\operatorname{ch} l(\xi+i\tau)}\right|^2=\left|\frac{\operatorname{ch} x\xi\cos x\tau+i\operatorname{sh} x\xi\sin x\tau}{\operatorname{ch} l\xi\cos l\tau+i\operatorname{sh} l\xi\sin l\tau}\right|^2=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}^2 x\xi\cos^2 x\tau+\operatorname{sh}^2 x\xi\sin^2 x\tau}{\operatorname{ch}^2 l\xi\cos^2 l\tau+\operatorname{sh}^2 l\xi\sin^2 l\tau}\leqslant\frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{ch}^2 l\xi\cos^2 l\tau+\operatorname{sh}^2 l\xi\sin^2 l\tau} \tag{2}$$

إذا كان $|\xi|<\delta$ فإن لدينا $|\tau-n\pi/l|<\varepsilon$ على الدائرة L_n من اجل n كبير بكفاية، وبالتالي $\cos^2 l\tau<1-\eta$، حيث η وَ ε صغيران بالقدر الذي نريد؛ إذن:

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2\leqslant\frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{(1-\eta)\operatorname{ch}^2 l\xi}=\frac{1}{1-\eta} \tag{3}$$

إذا كان $|\xi|\geqslant\delta$ فإننا نعـوض في مقام الطرف الاخير من (2) $\operatorname{ch}^2 l\xi$ بـِ $\operatorname{sh}^2 l\xi$ فنحصل على:

$$\left|\frac{\operatorname{ch} x\zeta}{\operatorname{ch} l\zeta}\right|^2\leqslant\frac{\operatorname{ch}^2 l\xi}{\operatorname{sh}^2 l\xi}=\operatorname{coth}^2 l\xi\leqslant\operatorname{coth}^2 l\delta. \tag{4}$$

ينتج من (3) وَ (4) أن النسبة $\left|\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{p}}{\operatorname{ch} l\sqrt{p}}\right|$ محدود على الدوائر المذكورة بثابت لا يتعلق بـِ n . وبالتالي فإن التكامل يرد، كما ذكرنا سابقا، الى مجموعة الرواسب. إن الراسب عند القطب $p=0$ يساوي 1 .

اما القطب عند القطب $p_n=-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$ فيساوي، نحسب ذلك بسهولة؛

$$\frac{(-1)^n \cdot 4}{\pi(2n-1)} e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$$

في الاخير، نحصل على الحل في شكل مجموع سلسلة:

$$u(x,\ t)=u_0+\frac{4}{\pi}(u_1-u_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$$

§ 15 .5 (*) أصناف التوابع شبه التحليلية

15. 15 . يطبق تحويل لابلاس بكل نجاح في مسائل ذات طابع نظري. تمثل نظرية أصناف التوابع شبه التحليلية نوعا من هذه المسائل(*).

نحن نعلم انه إذا كان $f(x)$ تابعا لمتغير حقيقي x وكان يقبل الاشتقاق لانهائيا بجوار نقطة x_0 فهو ليس بالضرورة تحليليا أي انه لا يقبل بالضرورة النشر وفق سلسلة ايلورية بجوار هذه النقطة. لكن إذا كانت مشتقات $f(x)$ لا تتزايد بسرعة كبيرة، مثلا إذا حققت هذه المشتقات الشروط:

$$\max_{|x-x_0|<\delta}|f^{(n)}(x)|\leqslant CM^n n! \tag{1}$$

فإن هذا التابع يصبح تحليليا بجوار النقطة x_0 (انظر 25.8).

إذا طبقنا دستور كوشي 43.10 (1) على مشتقات تابع تحليلي يمكننا بسهولة اثبات القضية العكسية وهي ان تحليلية تابع $f(x)$ بجوار نقطة x_0 تستلزم المتراجحات (1). لتكن $m_0, m_1, \ldots, m_n, \ldots$ متتالية كيفية من الاعداد الموجبة. ندخل الصنف $C_{\langle m_n\rangle}$ المؤلف من التوابع $f(x)$ المعرفة على المحور: $-\infty<x<\infty$ والمحققة للمتراجحات:

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant CM^n m_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

حيث C و M ثابتان قد يتعلقان باختيار التابع $f(x)$. إذا تزايدت

* حسب [6] 306

الاعداد m_n بسرعة تفوق سرعة n فإن الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ يمكن ان يحوي ايضا توابع غير تحليلية. الاّ ان دنجوي Denjoy اثبت عاما 1921 انه توجد اصناف $C_{\langle m_n \rangle}$ تحوي توابع غير تحليلية لكنها تتمتع بخاصية الوحدانيـة: إذا تسـاوي تـابعـان $f(x)$ وَ $g(x)$ ، منتميـان للصنـف $C_{\langle m_n \rangle}$ ، عند نقطة x_0 وكذا مشتقاتها على التوالي، فإن $f(x)$ و $g(x)$ تابعان متطابقان. إن هذه الخاصية معروفة فيما يخص التوابع التحليلية (تنتج من 93.10 ـ ر).

25. 15 . تسمى الاصناف $C_{\langle m_n \rangle}$ التي إذا تطابق تابعان منها ومشتقاتها على التوالي عند نقطة يصبح التابعان متطابقان، تسمى أصناف التوابع شبه التحليلية (أو أصناف شبه تحليلية). قدم كارلمان (Carlman) سنة 1926 وصفا كاملا للأصناف شبه التحليلية. واقترح اوستروفسكي (Ostrovski) سنة 1930 نصا أكثر بساطة. لفهم نصّ كارلمان ـ اوستروفسكي ينبغي ان نقوم ببعض الانشاءات التمهيدية. نفرض ان المتتالية m_n تتزايد لما $n \to \infty$ بسرعة تفوق سرعة أي تابع من الشكل r^n ، حيث $r > 0$ (سنبين ادناه انه إذا لم يكن الامر كذلك فإن المسألة تصبح في غاية البساطة). عندئذ، من اجل كل $r > 0$ فإن المتتالية r^n/m_n تؤول نحو 0 لما $n \to \infty$ وبالتالي فهي محدودة. يلعب فيما يلي التابع التالي الدور الرئيسي.

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}$$

يقبل التابع $T(r)$ تفسيرا هندسياً مفيدا. نعتبر في نصف المستوى الايمن من مستوى الاحداثيتين x وَ y ، متتالية النقاط ذات الاحداثيات $x_n = n$ وَ $y_n = -\ln m_n$ (نقاط فاليرون Valiron). بما أن $r^n/m_n \to 0$ لما $n \to \infty$ فإن $n \ln r - \ln m_n \to -\infty$ بحيث ان من اجل كل r و $b > 0$ لا يوجد سوى عدد منته من نقاط فاليرون المحققة للمتراجحة

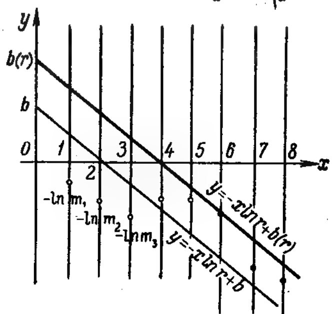
$$n \ln r - \ln m_n \geqslant b. \qquad (1)$$

يُقابل المعادلة $r + y = b$ أو المعادلة $y = -x \ln r + b$ في

نصف المستوى الايمن ذي الاحداثيات x وَ y ، نصف مستقيم معاملة الزاوي $\ln r$ يقطع محور الاحداثية y عند النقطة b . تبين المتراجحة (1) انه لا يوجد فوق نصف المستقيم هذا سوى عدد منته من نقاط فاليرون. إذن، من اجل كل r يمكن ايجاد نقطة $b = b(r)$ بحيث يستحيل ايجاد نقطة لفاليرون فوق المستقيم

$$y = -x \ln r + b(r)$$

اما على المستقيم ذاته فتوجد على الاقل نقطة (الرسم 5.15) يسمى نصف المستقيم هذا نصف مستقيم فاليرون.



الرسم 5.15

لدينا، انشاء، من اجل كل $b = b(r)$ وكل n :

$$-n \ln r + b(r) \geqslant -\ln m_n$$

بحيث ان.

$$b(r) \geqslant \sup_n \{n \ln r - \ln m_n\} = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n} \tag{2}$$

لكن، بما ان المتراجحة (2) تصبح مساواة من اجل عدد n على الاقل فإن لدينا في الواقع:

$$b(r) = \sup_n \ln \frac{r^n}{m_n}$$

إذن:

$$b(r) = \ln T(r) \tag{3}$$

سيساعدنا التفسير الهندسي للتابع $\ln T(r)$ في الوصول الى بعض خاصيات هذا التابع. نلاحظ في البداية انه ينتج من تعريف التابع $b(r)$

ان $b(r)$ تابع متزايد لـ r : لو كان $b(r_2) < b(r_1)$ من اجل $r_2 > r_1$ لمرّ كل تصف مستقيم $y = -x \ln r_2 + b(r_2)$ تحت نصف المستقيم $y = -x \ln r_1 + b(r_1)$ ، وهو ما يناقض كون هذا نصف المستقيم يحمل على الاقل نقطة ليفاليرون. ثم ، يمكننا دوما انشاء نصف مستقيم ليفاليرون حسب قيمة b المعطاة (هذه القيمة هي $> \inf b(r)$) وذلك باعتبار جماعة كافة انصاف المستقيمات التي تقطع محور الترتيبات عند النقطة b وبالاستدلال وفق الطريقة الواردة اعلاه. يعني ذلك ان التابع المتزايد $b(r) = \ln T(r)$ يأخذ كل القيم $(> \inf b(r))$ وبالتالي فهو مستمر (63.5). (يمكن ايضا البرهان على انه تابع خطي بتقطع لـ $\ln r$ لكننا لسنا في حاجة لذلك).

بمقدورنا الآن تقديم نص اوستروفسكي لنظرية كارلمان:

نظرية: نضع

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n} \tag{4}$$

عندئذ ، لكي يكون الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ شبه تحليلي يلزم ويكفي ان يكون:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty \tag{5}$$

ليكن مثلا $m_n = (n!)^{\alpha}$ ، حيث α مثبت. من السهل حينئذ ان نرى ، باستخدام دستور ستيرلينغ (75.11 - ب) ، بأن $T(r) \sim r^{1-\alpha}$

وبأن التكامل (5) متقارب من اجل $\alpha > 1$ ومتباعد من اجل $\alpha \leqslant 1$. ينتج عندئذ من نظرية كارلمان ان الصنف $C_{\langle (n!)^{\alpha} \rangle}$ يكون شبه تحليلي إذا وفقط إذا كان $\alpha \leqslant 1$ (نذكّر فضلا عن ذلك ان هذا الصنف مشكل من توابع تحليلية).

هناك اصناف شبه تحليلية تحوي ، فيما تحوي ، توابع غير تحليلية. يمكن ان نثبت مثلا ان التابع $f(x) = \sum T^{-1}(n) \cos nx$ ينتمي للصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ وهو ليس تحليليا في حالة $\sqrt[n]{m_n}/n \to \infty$ ؛ إذن من اجل:

مثلا فإن الصنف شبه التحليلي $C_{\langle m_n \rangle}$ يحوي توابع $m_n = n! \ln^n n$ غير تحليلية.

35.15 . نبرهـن فيما يلي (35.15 ـ 65.15) على نظـريـة كـارلمان. اوستروفسكي الواردة في 25.15 .

نرد، في هذه الفقرة، مسألة تمييز الاصناف شبه التحليلية الى مسألة حول التوابع التحليلية في نصف مستو، وذلك باستخدام تحويل لابلاس.

لنفرض أن الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ ليس شبه تحليلي. يعني ذلك انه يوجد تابعان $f(x)$ وَ $g(x)$ متطابقان عند نقطة $x = x_0$ وكذا مشتقاتها على التوالي، بدون ان يكون هذان التابعان متطابقين اينما كان. دون المس بعمومية المسألة، نستطيع وضع $x_0 = 0$ وَ $f(x) \not\equiv g(x)$ من اجل $x > 0$ ؛ يمكننا دوما الرجوع لهذه الحالة باجراء انسحاب وتعويض x بـ $-x$، أي باجراء العمليات القابلة للإنجاز في الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$. نعتبر بعد ذلك التابع $\varphi(x)$ المنعدم من اجل $x < 0$ والمساوي لـ $f(x) - g(x)$ من اجل $x \geqslant 0$ ؛ من البديهي انه تابع ينتمي الى الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$. بما ان التابع منعدم من اجل $x < 0$ ومحدود من اجل $x > 0$ فهو يقبل محوّلة للابلاس:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-px} dx \tag{1}$$

وهي تابع تحليلي في نصف المستوى $\operatorname{Re} p > 0$.

نبرز الآن بعض خاصيات التابع $\Phi(p)$. إذا كاملنا بالتجزئية n مرة في المساواة (1) نحصل على: $p^n \Phi(p) = \int_0^\infty \varphi^{(n)}(x) e^{-px} dx$

ومنه يأتي التقدير:

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant C M^n m_n \int_0^\infty e^{-px} dx = C M^n m_n \frac{1}{|p|} \leqslant C_\gamma M^n m_n$$

وذلك من اجل $|p| > \gamma > 0$. القضية العكسية قائمة ايضا، لرؤية ذلك نعتبر $\Phi(p) \not\equiv 0$ تابعا تحليليا معطى في نصف المستوى الكيفي

$\operatorname{Re} p > \gamma_0 > 0$ يحقق المتراجحات.

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant C M^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

من البديهي ان $\Phi(p)/p^2$ يحقق فرض النظرية 15 .24 ـ أ؛ يمكن اختيار مثلا $Cm_0 \frac{1}{|\gamma_0 + i\eta|^2}$ بمثابة الحاد الاعلى القابل للمكاملة الذي يتطلبه الشرط 2) من النظرية المذكورة اعلاه. يأتي من النظرية هذه ان التابع المعرف بالمساواة $(\gamma > \gamma_0)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} e^{px} dp \tag{2}$$

منعدم من اجل $x < 0$. لما كان $\Phi(p) \not\equiv 0$ فإن لدينا ايضا $\varphi(x) \not\equiv 0$ من اجل $x > 0$. اضافة الى ذلك فإن $\varphi(x)$ يقبل الاشتقاق من كل الرتب:

$$|(\varphi(x) e^{-\gamma_0 x})^{(n)}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Phi(p)}{p^2} (p - \gamma_0)^n e^{(p - \gamma_0)x} dp \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CM^n m_n}{2\pi} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left| \frac{p - \gamma_0}{p} \right|^n \frac{|dp|}{|p^2|} \leqslant \frac{C}{2\pi} M^n m_n \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{|dp|}{|p|^2} = C' M^n m_n$$

نرى إذن ان التابع $\varphi(x) e^{-\gamma_0 x}$ ينتمي الى الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$. بما أن $\varphi(x) = 0$ من اجل $x < 0$ و $\varphi(x) \not\equiv 0$ فإن الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ ليس شبه تحليلي. إذن فإن مسألة شبه تحليلية صنف $C_{\langle m_n \rangle}$ معطى تكافيء مسألة وجود تابع $\Phi(p) \not\equiv 0$ تحليلي في نصف المستوى $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ يحقق المتراجحات:

$$|p^n \Phi(p)| \leqslant C M^n m_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(« مسألة واتسن « Watson »).

15 .45 . بالقلب $p = 2\gamma/s$ يصبح نصف المستوى $\operatorname{Re} p > \gamma$ هو القرص $|s - 1| < 1$ وترد مسألة واتسن الى المسألة التالية: ما هي الشروط التي ينبغي توفرها في متتالية m_n لكي يوجد في القرص $|s - 1| < 1$ تابع تحليلي $F(s) \not\equiv 0$ يحقق المتراجحات:

$$|F(s)| \leqslant C M^n m_n |s|^n \tag{1}$$

نلاحظ على سبيل المثال ان مثل هذا التابع غير موجود عندما يكون $m_n \leqslant C_1 r_0^n$ من اجل متتالية اعداد $n_1, n_2, \ldots$. ذلك انه إذا كان:

$$|F(s)| \leqslant CM^n C_1 r_0^n |s|^n = CC_1 (Mr_0 |s|)^n \quad (n = n_1, n_2, \ldots)$$

فإن اختيار $|s| < 1/(Mr_0)$ والانتقال الى النهاية من اجل $n_k \to \infty$ يؤدي الى $F(s) \equiv 0$ خلافا للإفتراض. وهكذا فإن الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ شبه تحليلي ضمن الافتراضات المتخذة على المتتالية m_n .

من جهة أخرى لدينا في الحالة الراهنة:

$$T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n} = \infty \text{ pour } r > r_0$$

اما الشرط (1) فهو محقق بداهة. كما سبق ان رأينا في 25.15 عندما يكون $m_{n_k} \leqslant C_1 r_0^{n_k} \ (k = 1, 2, \ldots)$ فإن المسألة بسيطة جداً.

نعود الى الحالة العامة ونفرض وجود تابع $F(s)$ يحقق الشروط المذكورة. يمكن ايجاد ρ بحيث $F(\rho) \neq 0$ ، $|F(\rho + \rho e^{i\theta})| < 1$ من اجل كل الاعداد الحقيقية θ وبحيث يكون التابع $F(s)$ على الدائرة: $s = \rho + \rho e^{i\theta}$ صفر واحد عند $s = 0$. إن كل الانشاءات التي اوردناها محققة في القرص $|s - \rho| \leqslant \rho$. بفضل المتراجحات (1) لدينا:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant CM^n m_n \rho^n |1 + e^{i\theta}|^n = CM^n m_n \left|2\rho \cos\frac{\theta}{2}\right|^n.$$

بأخذ اصغر قيمة في الطرف الاخير من المتراجحة الاخيرة نجد:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{\max\limits_n \dfrac{1}{M^n m_n \left|2\rho \cos\dfrac{\theta}{2}\right|^n}}$$

ومن تعريف التابع $T(r)$:

$$|F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{T\left(\dfrac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right)}$$

إذن:

$$\ln |F(\rho + \rho e^{i\theta})| \leqslant \ln C - \ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}\right)$$

لدينا النظرية التالية (سنورد برهانها في 65.15) المتعلقة بالتوابع التحليلية: إذا كان $\Phi(z)$ تابعا تحليليا في القرص $|z-z_0|<h$ وكان غير منعدم عند $z=z_0$ ولا يتجاوز الوحدة بالطويلة وكان مستمرا في القرص المغلق $|z-z_0|\leqslant h$ ويقبل صفرا واحدا على الدائرة $|z-z_0|=h$، فإن التكامل:

$$-\int_0^{2\pi} \ln|\Phi(z_0+he^{i\theta})|\,d\theta$$

منته.

بتطبيق هذه النظرية على التابع $\Phi(z)=F(z)$ نرى ان التابع:

$$\ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\leqslant \ln C-\ln|F(\rho+\rho e^{i\theta})|$$

يقبل هو الآخر تكاملا منتهيا بالنسبة لـِ θ من الصفر الى 2π . إذا اجرينا التعويض.

$$2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{r}$$

فإننا نصل الى تقارب التكامل:

$$\int_a^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\frac{1}{\sqrt{M^2\rho^2-\frac{1}{4r^2}}}\,dr$$

وكذلك الى تقارب التكامل:

$$\int_a^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr \tag{2}$$

اخيرا، إذا لم يكن الصنف $C_{\langle m_n\rangle}$ شبه تحليلي فإن التكامل (2) متقارب. يبين ذلك كفاية شرط كارلمان الوارد في 25.15 .

55.15 . نشرع في البرهان على لزوم شرط كارلمان بافتراض ان التكامل 45.15(2) متقارب. عندئذ يكون الامر كذلك فيما يخص التكامل:

$$\int_0^{2\pi}\ln T\left(\frac{1}{2M\rho\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)d\theta,$$

وبالتالي يمكن انشاء تكامل بواسون (Poisson):

$$G(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta$$

الذي هو تابع توافقي في الدائرة $r < 1$. نضع $G(s-1) = P(s)$ ونرمز بـِ $Q(s)$ للتابع التوافقي المرافق (94.14 ـ ج) في القرص $|s-1| < 1$. ليكن بعد ذلك : $F(s) = e^{-\{P(s)+iQ(s)\}}$

حينئذ يحقق التابع $F(s)$ المتراجحات:

$$|F(s)| \leqslant m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

ذلك ان المتراجحات (1) تكافيء المتراجحات:

$$e^{-P(s)} \leqslant m_n |s|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

أو المتراجحات:

$$-G(s) = -P(s+1) \leqslant \ln m_n + n \ln (s+1) \tag{2}$$

يمكن تمثيل الحدين في الطرف الأيمن من (2) على شكل تكاملي بواسون:

$$\ln m_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln m_n (1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta,$$

$$n \ln |s+1| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n \ln |e^{i\theta}+1| (1-r^2)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta,$$

بعد ذلك تصبح المتراجحة (2) المطلوب اثباتها كالتالي:

$$\int_0^{2\pi} \ln \left\{ T\left(\frac{1}{2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\right) m_n |1+e^{i\theta}|^n \right\} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta \geqslant 0 \tag{3}$$

لكن $|1+e^{i\theta}| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ ، لما كان:

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}$$

لدينا من اجل كل n على حدة:

$$T(r) \geqslant \frac{r^n}{m_n}, \quad T(r) m_n r^{-n} \geqslant 1$$

وبالتالي فإن التابع تحت رمز المكاملة في (3) غير سالب. ينتج من ذلك ان المتراجحة (3) محققة، وبالتالي فالأمر كذلك بالنسبة لـِ (1)، ومنه يأتي ان الصنف $C_{\langle m_n \rangle}$ ليس شبه تحليلي حسب 35.15 . ينتهي بذلك برهان نظرية كارلمان.

15 .65 . نبرهن هنا على النظرية المستخدمة في 15 .45 .

نظرية. إذا كان تابع $f(z)$ تحليليا في قرص $|z - z_0| < h$ وغير منعدم عند $z = z_0$ ولا يتجاوز العدد واحد بالطويلة، وكان مستمرا في القرص المغلق $|z - z_0| \leqslant h$ ويقبل صفرا واحداً z^* على الدائرة $|z - z_0| = h$ فإن التكامل:

$$-\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0 + he^{i\theta})|\, d\theta$$

منته.

البرهان. بدون المس بعمومية القضية يمكننا وضع $z_0 = 0$ وَ $h = 1$ وَ $z^* = 1$. إن التابع $f(z)$ تحليلي في القرص $|z| \leqslant r < 1$ ولا يمكن ان يوجد في هذا القرص سوى عدد منته من الاصفار $z_1, \ldots, z_m$ ؛ نستطيع ان نفرض انه لا توجد اصفار على الدائرة $|z| = r$. نعتبر المحيط المغلق C المبين في الرسم 15 .6 وهو مشكل من اقواس الدائرة $|z| = r$ مرسومة في الاتجاه الموجب والدوائر C_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$، التي لها نصف قطر ε صغير جداً، مرسومة في الاتجاه السالب وبالمنحنيات $L_k = [z_k'', z_k']$ التي تربط الاقواس المذكورة، وهي مرسومة كلها مرتين في اتجاهين متعاكسين. إن التابع $\ln f(z)$ تحليلي داخل المحيط C ويمكن تمثيل القيمة $\ln f(0)$ بدستور كوشي:

$$\ln f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln f(z) \frac{dz}{z}. \quad (1)$$

نعتبر جزء المحيط C ، المشكل من الدائرة C_j ذات نصف القطر ε والمتمركزة عند النقطة z_j ، نرسم هذه الدائرة في الاتجاه السالب. يكتب جزء التكامل (1) المأخوذ على طول الدائرة C_j على الشكل:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \ln f(z) \frac{i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta}{z_j + \varepsilon e^{i\theta}}. \quad (2)$$

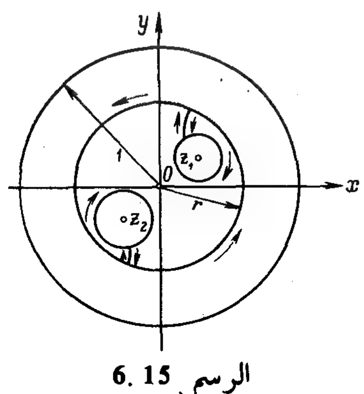
إذا كان k_j هو تضاعف الجذر z_j فإن:

$$f(z) = (z - z_j)^{k_j} f_j(z)$$

حيث $f_j(z_j) \neq 0$ ولدينا :

$$|\ln f(z)| = |\ln (z - z_j)^{k_j} f_j(z)| =$$
$$= |k_j \ln (z - z_j) + \ln f_j(z)| \leqslant k_j |\ln |z - z_j| + 2\pi| +$$
$$+ |\ln f_j(z)| \leqslant k_j |\ln \varepsilon| + C_1.$$

يتبين من هذا التقدير ان التابع الواقع تحت التكامل في (2) يصبح صغيرا بالقدر الذي نريد عندما نجعل ε يؤول الى الصفر، وبالتالي فإن جميع التكاملات على طول الدوائر C_j تؤول الى الصفر عندما يؤول ε الى الصفر



الرسم 6.15

إذن فإننا عندما نحيط بالنقطة z_j في الاتجاه السالب يتزايد التابع: $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ بمقدار $-2\pi k_j i$ ، وبالتالي فإن التكامل على طول جزء المحيط المشكل فمن قطعة المستقيم L_j المرسومة مرتين في الاتجاهين المتعاكسين، يساوي:

$$k_j \int_{L_j} \frac{dz}{z} = k_j [\ln z_j' - \ln z_j''].$$

نلاحظ على كل جزء موال من الدائرة $|z| = r$ ان التابع $\ln f(z)$ يتزايد بمقدار $-2\pi k_j i$. ، وهو ما يضيف الى التكامل (1) الكمية

$$k_j \int_{z_j'}^{z_{j+1}''} i \, d\theta$$

التي تمثل عددا تخيلياً محضا. بعد ذلك نفصل الجزء الحقيقي في المساواة

(1) لما $\varepsilon \to 0$؛ نحصل على:

$$\ln|f(0)| = \sum_{j=1}^{m} k_j \ln|z'_j| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

لكن، لما كان $|z'_j| < 1$ ، $\ln|z'_j| < 0$ فإن:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \geqslant \ln|f(0)|$$

وهذا يعني بالضبط أن

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\ln|f(0)|$$

لدينا على الدائرة $|z| = 1$ فرضا صفر واحد عند النقطة $z^* = 1$.
نختار عددا $\delta > 0$ كيفيا؛ من البديهي أن:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi-\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\ln|f(0)|.$$

نحتفظ بـ δ مثبتا وننتقل الى النهاية بجعل r يسعى الى 1 في المتراجحة السابقة، نحصل عندئذ على:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant -\ln|f(0)|.$$

إن هذه المتراجحة قائمة من اجل كل $\delta > 0$. بالانتقال الى النهاية $\delta \to 0$ نرى ان التكامل:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta$$

موجود. انتهى برهان النظرية.

تمارين

1 . اثبت تقارب تكامل فوريي:

$$\varphi(x)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{\sin pt}{t}\,dt$$

عند نقطة x التي بجوارها يكون التابع $\varphi(x)$ مستمرا ورتيباً، اثبت كذلك تقاربه المنتظم في كل مجال مغلق داخل مجال رتابة واستمرار للتابع $\varphi(x)$.

2 . قدم مثالا لتابع $\varphi(x)$ مستمر ويقبل تكاملاً لفوريي متقاربا بنتظام، وبحيث يكون التابع

$$\psi(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{ix\sigma}\,dx$$

غير متقارب مطلقا على $-\infty<\sigma<\infty$.

3 . قدم مثالا لتابع $\varphi(x)$ بحيث يكون تكامله فوريي:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{\sin pt}{t}\,dt=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi$$

متقاربا بانتظام على المحور $-\infty<x<\infty$، لكن كلا من التكاملين:

$$\lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\},\quad \lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\xi\right\}$$

يقبل نقاط تباعد.

4 . اثبت « مساواة بارسفال Parseval »:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma)|^2\,d\sigma=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx.$$

حيث $g(\sigma)$ هو محولة فوري تابع $f(x)$ يحقق فرض النظرية 31. 15 ومربعة يقبل المكاملة على كل المحور $-\infty<x<\infty$ (بنونشرال Plancherel).

5 . برهن على « علاقة الشك »

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2|g(\sigma)|^2\,d\sigma\geqslant\frac{\pi}{2}$$

بافتراض ان التابعين $xf(x)$ و $f'(x)$ يحققان فرض التمرين 4 وان

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1 .$$

6 . ليكن $F(p)$ محولة لا بلاس تابع $f(t)$. اوجد محولات لابلاس التوابع : $f_1(t) = e^{at}f(t)$ ، $f_2(t) = f'(t)$ ، $f_3(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ ، $f_4(t) = tf(t)$ ، $f_5(t) = \frac{f(t)}{t}$.

7 . اوجد محولات لابلاس التوابع : $\varphi_1(t) = e^{at}$ ، $\varphi_2(t) = t^{\alpha-1}\ (\alpha > 0)$ ، $\varphi_3(t) = t^{\alpha-1}e^{at}$ ، $\varphi_4(t) = \sin at$ ، $\varphi_5(t) = \cos at$ ، $\varphi_6(t) = \frac{\sin at}{t}$.

8 . اثبت دستور القلب لميلين (**Mellin**) : إذا كان :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)\, x^{s-1}\, dx$$

فإن :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds.$$

نبذة تاريخية

ظهر تكامل فوريي لاول مرة في كتاب فوريي « النظرية التحليلية للحرار » (1822) حيث طبق هذا التكامل على العديد من مسائل الفيزياء الرياضية. لم تتضمن اعمال فوريي وكذا اعمال كوشي الذي استخدم تكامل فوريي عند دراسة انتشار الأمواج (2 ـ 184)، أي برهان على التقارب؛ برزت البراهين السليمة، ضمن افتراضات مختلفة، خلال كل القرن التاسع عشر، وهي تمثل تعديلات في البراهين الموافقة لها الخاصة بتقارب سلاسل فوريي. اما « تحويل لا بلاس » فقد درسه وطوره لا بلاس سنة 1812 في « النظرية التحليلية للإحتمالات »؛ نلاحظ ان اولر كان قد اعتبر منذ 1737 تكاملات $e^{-px}f(x)$ لحل معادلات تفاضلية عادية. لم يُتعرض زمن أولر ولابلاخ أبداً لإستعمال تحويل لا بلاس في الساحة العقدية. انطلقت ابتداء من سنة 1892 اعمال المهندس الانكليزي هيفيسايد (Heaviside) الذي عثر، بفضل تفسير وفق قواعد ادخلها فو نفسه لتوابع $p=\frac{\partial}{\partial t}$ (خارج صنف التوابع الكسرية)، على حلول بعض لمسائل الكهروتقنية التي تردّ الى معادلات ذات مشتقات جزئية. ظل خلال فترة من الزمن « الحساب المؤثري » لهيفيساید بدون اساس رياضي. ثم قام ابتداء من 1910 برومويش (Bromwich) ثم كارسون (Carson) وفان داربول (Van der Pol) وداتش (Doetsch) بتبرير قواعد هيفيساید بتطبيقهم لتحويل لا بلاس في الساحة العقدية. يرجع عهد اعمال دانجوي وكارلمان واوستروفسكي مول اصناف التوابع شبه التحليلية الى 1920 ـ 930.

إن التقدم الذي تحقق فيا بعد في نظرية تحويل فوريي مرتبط من جهة باستخدام تكامل لوبيغ (وتكامل لوبيغ ـ ستيلجاس) وبنظرية التوزيعات (أو التوابع المعممة) من جهة ثانية؛ نلاحظ بصفة خاصة ان التوزيعات تسمح بتعريف محولة فوري تابع يتزايد لا نهائيا (لما $|x|\to\infty$). ثم إن هذا الامر، بدوره، امر رئيسي لحل مسائل اساسية في نظرية المعادلات الخطية ذات المشتقات الجزئية وذات المعاملات الثابتة. راجع (13) و (15) و (10).

الفصل 16

المنحنيات الاساسية

إن موضوع الرياضيات البحته هو الاشكال الفضائية والنسب الكمية للعالم الواقعي، وبالتالي فهي مادة جد ملموسة. إن بدت هذه المادة في شكل تجريدي الى حد كبير فإن ذلك لا يمكنه ان يحجب مصدرها، الواقع في العالم الخارجي، الاّ بستار شفاف.

ف . انغلس F.Engels

§ 16 1 . تعاريف اساسية

16 .11 . يعرّف منحن L في فضاء R_n بعده n على انه محل هندسي تعينه جملة معادلات وسيطية:

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1}$$

أو، وهو الامر نفسه، معادلة شعاعية:

$$x = x(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{2}$$

يسمى الشعاع $x(t)$ **نصف قطر شعاع المنحنى** L .

نفرض أن التوابع $x_j(t)$ مستمرة وتحقق بعض شروط الاشتقاق التي سنحددها فيا بعد. حتى يكون محل هندسي (1) من الشكل المعتاد لمنحن فإنه لا يكفي ان تكون التوابع $x_j(t)$ مستمرة: توجد جمل من النوع (1) اطرافها الثانية مستمرة في حين ان المحل الهندسي المقابل لها يمثل كل الفضاء R_n (راجع التمرين 5). نلاحظ ايضا انه بالامكان ان يُمثل نفس المنحنى (اي نفس المحل الهندسي) بعدة جمل مختلفة من النوع (1)؛ على

سبيل المثال فإن الجملتين:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

و

$$x = r\cos(t^3), \quad y = r\sin(t^3)$$

تعرفان من اجل $-\infty < t < \infty$ نفس المحل الهندسي في المستوى (x, y) وهو الدائرة المعينة بنصف قطرها r ومركزها مركز الاحداثيات. سنرى بعد حين ان اختيار التمثيل الوسيطين المناسب يسهل في اغلب الاوقات كتابة الخاصيات الهندسية لمنحن معلوم، صراحة.

21. 16 . كنا رأينا حالة اعم كان $x(t)$ ، الوارد في المعادلة 16 .11(2)، يمثل فيها نقطة من فضاء متري تتعلق بوسيط t ؛ كان ذلك منحنيا في فضاء متري. عرفنا في 12 .16 ، في الحالة التي تكون فيها قيم التابع $x(t)$ منتمية لفضاء نظيمي B ، مشتق التابع الشعاعي $x(t)$ عند نقطة $t = c$ كما يلي:

$$x'(c) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(c+\Delta t) - x(c)}{\Delta t} \qquad (1)$$

وذلك عند وجود الطرف الايمن بمفهوم مسافة الفضاء B . حينئذ يكون التابع $x(t)$ قابلا للإشتقاق عند نقطة $t = c$. إذا وجدت النهاية (1) من اجل كل $c \in [a, b]$ فإن التابع $x(t)$ يقبل الاشتقاق على المجال $[a, b]$.

سندرس التوابع القابلة للاشتقاق التي قيمها في فضاء ذي بعد m ، لكن هناك نتائج ستكون صالحة حتى في فضاء نظيمي (ذي بعد غير منته).

31. 16 . نلاحظ باديء ذي بدء انه بما ان الانتقال الى النهاية في فضاء بعده m يكافيء الانتقال الى النهاية احداثية احداثية فإن قابلية التابع الشعاعي $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ للإشتقاق عند $t = c$ بمفهوم 16 .21(1) يكافيء قابلية اشتقاق m تابعا عدديا $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ عند $t = c$ ؛ اضافة الى ذلك، لدينا:

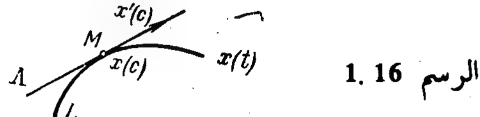
$$x'(c) = (x_1'(c), \ldots, x_m'(c)) \in R_m \qquad (1)$$

لنفسر هندسيا قابلية تابع شعاعي للاشتقاق. كنا تكلمنا في هذا الموضوع في بداية الفصل 13 ؛ نعالج في هذا الفصل القضية بشكل مستقل وبالتفصيل.

يمكن وضع التعريف 21.16 (1) للمشتق في شكل مكافيء :

$$\Delta x \equiv x(c+\Delta t) - x(c) = x'(c)\,\Delta t + \varepsilon(t)\,\Delta t, \qquad (2)$$

حيث يؤول الشعاع $\varepsilon(t)$ الى الصفر من اجل $\Delta t \to 0$. تبين المساواة (2) ان تزايد التابع $x(t)$ عندما يتغير t من c الى $c+\Delta t$ يحوي الجزى الخطي الرئيسي $x'(c)\,\Delta t$. نقول عن نقطة $t = c$ إنها عادية (أو معتادة) إذا كان $x'(c) \neq 0$ ، وإنها نقطة شاذة عندما $x'(c) = 0$ (انظر 36.9 - ص). إن الصورة الهندسية الموافقة للمعادلة الخطية:



الرسم 1.16

$z = x(c) + x'(c)(t-c)$ في الحالة التي تكون فيها النقطة $t = c$ عادية هي المستقيم Λ المار بالنقطة $M = x(c)$ في اتجاه الشعاع $x'(c)$ (الرسم 1.16).

وهكذا فإن الانحراف من نقطة على المنحنى الى النقطة المقابلة لها (أي من اجل نفس القيمة لـ t) على المستقيم Λ ، لا متناهى الصفر رتبته عليا بالنسبة لـ Δt . لهذا السبب، سمي المستقيم Λ **مماس المنحنى L عند النقطة M** . بحيث ان وجود مشتق $x'(c)$ غير منعدم يكافيء وجود مماس للمنحنى L عند النقطة M ؛ اما الشعاع $x'(c)$ فهو الشعاع الموجه (أو التوجيهي) لهذا المماس.

41.16 . لنر ماذا يحدث لشعاع موجه لمماس عندما ننتقل على المنحنى L الى وسيط جديد τ بحيث يكون $t = t(\tau)$ تابعا قابلا للاشتقاق لـ τ . ليكن، بصفة خاصة، $c = t(\gamma)$ وَ $t'(\gamma) \neq 0$. نضع عندئذ :

$$x(t(\tau)) \equiv g(\tau)$$

ونكتب :

$$g'(\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = x'(t)\, t'(\tau) \qquad (1)$$

وذلك حسب قاعدة اشتقاق تابع مركب (12 .16 ـ ط).

وبالتالي فإن للشعاع الموجه الجديد $g'(\tau)|_{\tau=\gamma}$ نفس اتجاه الشعاع القديم $x'(t)$ ، ونستنتج الاول من الثاني بضرب هذا الاخير في $t'(\tau)$. وهكذا فإن طول الشعاع الموجه لمماس لا يقبل اي تفسير هندسي مباشر. كما سبق وان ذكرنا في 13 .11 ـ د يمكننا منح الشعاع $x'(t)$ معنى حركي؛ إذا رمز t للزمن فإن $x'(c)$ هو سرعة حركة النقطة $x = x(t)$ على طول المنحنى L في اللحظة $t = c$.

16 .51 . ندخل اخيرا مفهوم تفاضلية تابع شعاعي $x(t)$. يسمى الشعاع $dx = x'(c)\, dt$ ، حيث $dt = \Delta t$ تزايد كيفي للوسيط t ، **تفاضلية التابع الشعاعي** $x(t)$ عند $t = c$. إذن فإن تفاضلية تابع هي الجزء الخطي الرئيسي لتزايده الموافق لتزايد المتغير المستقل t .

لدينا كما ورد اعلاه نظرية لا تغير التفاضلية: إن تفاضلية تابع لها نفس الشكل سواء كان t متغيرا مستقلا او تابعا لمتغير آخرا مستقلا (يمثل dt في الحالة الاخيرة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $t(\tau)$). ذلك انه إذا كان $g(\tau) = x[t(\tau)]$. فإن:

$$d_{(\tau)}x = g'(\gamma)\, dt = x'(c)\, t'(\gamma)\, d\tau = x'(c)\, dt = d_{(t)}x,$$

وهو ما اكدناه.

16 .61 . مكاملة تابع شعاعي . عرفنا هذه العملية ضمن 12 .26 فيما يخص التوابع الشعاعية التي تأخذ قيمها في فضاء نظيمي B . تكامل تابع شعاعي $x(t)$ ، $a \leqslant t \leqslant b$ ، قيمه في فضاء تام B ، مثلا في الفضاء R_m ، هو تعريفا الكمية:

$$\int_a^b x(t)\, dt = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x(\xi_k)\, \Delta t_k,$$

$$\Pi = \{a = t_0 \leqslant \xi_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = b\}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

حيث يتعلق الامر بالنهاية بالنسبة لنظيم الفضاء B من اجل التقسيم اللامنتهي للتجزئة Π ، اي من اجل

$$d(\Pi) = \max \Delta t_k \to 0$$

اثبت وجود التكامل باعتبار $x(t)$ مستمرا بتقطع. اشرنا ضمن 26. 12 ـ ج لأهم خاصيات التكامل:

1) $\int_a^b \alpha x(t)\,dt = \alpha \int_a^b x(t)\,dt$ وهذا من اجل α حقيقي.

2) $$\int_a^b [x(t)+y(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + \int_a^b y(t)\,dt$$

3) $$\int_a^c x(t)\,dt + \int_c^b x(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt \quad (a \leqslant c \leqslant b)$$

4) $$\left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \| x(t) \| (b-a).$$

نستكمل هذه الخاصيات بدستور المكاملة بالتجزئة

5) $$\int_a^b u(t)\,dv(t) = u(t)\,v(t)\,|_a^b - \int_a^b v(t)\,du(t)$$

يمثل هنا $u(t)$ تابعا قابلا للاشتقاق قيمه في الفضاء .B ، اما $v(t)$ فيمثل تابعا عدديا قابلا للاشتقاق. يشبه البرهان على الدستور 5) البرهان المماثل له الخاص بالتوابع العددية (15. 9 ـ أ).

71. 16 . المشتقات ذات الرتب العالية.

أ . عرفنا المتشتقات من الرتب العالية لتابع شعاعي $x(t)$ في 46. 12 . إن المشتق من الرتبة n هو تعريفا المشتق الاول للمشتق من الرتبة $(n-1)$ إن كان هذا الاخير تابعا قابلا للإشتقاق من اجل $a \leqslant t \leqslant b$ نفرض فيما يلي وجود كل هذه المشتقات.

ب . لنر كيف تتغير التوابع الشعاعية x_t ، x_{tt} ، ... ، عندما نعوض المتغير المستقل t بمتغير مستقل جديد τ ، $t = t(\tau)$ ، حيث $t(\tau)$ تابع لـ τ مرن بكفاية.

كنا رأينا (41.16) ان المشتق الاول بالنسبة لـِ t لا يختلف عن المشتق الاول بالنسبة لـِ τ الاّ بالعامل $t(\tau)$:

$$x_\tau = x_t t_\tau$$

باشتقاق هذه المساواة بالنسبة لـِ τ وبتطبيق مرة اخرى دستور اشتقاق تابع مركب نجد:

$$x_{\tau\tau} = (x_\tau)_\tau = (x_t t_\tau)_\tau = (x_t)_\tau t_\tau + x_t t_{\tau\tau} = x_{tt} t_\tau^2 + x_t t_{\tau\tau}$$

من ذلك نلاحظ ان الشعاع $x_{\tau\tau}$ ليس موازيا عموما للشعاع x_{tt} لكنه يقع في مستوى الشعاعين x_t وَ x_{tt} . وهكذا فإن المستوى المعين بالشعاعين x_t وَ x_{tt} لا يتعلق باختيار الوسيط، على الرغم من ان موقع الشعاع x_{tt} في المستوى يتغير عند الانتقال الى وسيط جديد.

في الحالة العامة، مهما كان n، فإن الشعاع $x_\tau^{(n)}$ ينتمي الى الفضاء الجزئي ذي البعد n المولد عن الاشعة $x_t, x_{tt}, \ldots, x_t^{(n)}$

نبرهن على ذلك بالتدريج: نفرض العلاقة:

$$x_\tau^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k)} \varphi_k(\tau)$$

ونشتقها مرة اخرى بالنسبة لـِ τ؛ نحصل على:

$$x_\tau^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k+1)} t_\tau \varphi_k(\tau) + \sum_{k=1}^{n} x_t^{(k)} \varphi_k'(\tau),$$

بحيث يمكن التعبير خطياً على $x_\tau^{(n+1)}$ بواسطة:

$$x_t,\ x_{tt},\ \ldots,\ x_t^{(n+1)}$$

وهو المطلوب.

يمكن القول ان الذي له معنى هندسي ليست الاشعة x_t، x_{tt}، ...، $x_t^{(n)}$، ... ذاتها بل المنوعات الخطية المولدة عنها. تسمى هذه المنوعات الخطية **الفضاءات الجزئية الملاصقة** من البعد 1، 2، ...، n، ... (وهذا في الحالة التي تكون فيها x_t، x_{tt}، ... مستقلة خطيا).

ج. إذا كان التابع $x(t)$ يقبل الاشتقاق $n+1$ مرة على المجال

$[a, b]$ فإن دستور تايلور (12 .46 ـ ج) قائم:

$$\Delta x(t) \equiv x(t+\Delta t) - x(t) =$$
$$= x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \ldots + x^{(n)}(t)\frac{(\Delta t)^n}{n!} + Q_n$$

عندما نضع $n=1$ ، 2 ، ... في العلاقة السابقة ونستخدم التقدير الوارد في 12 .46 ـ ج بخصوص Q_n نصل الى سلسلة دساتير تزداد دقة اكثر فأكثر:

$$\Delta x(t) = x'(t)\Delta t + \varepsilon_1(t)\Delta t, \tag{1}$$

$$\Delta x(t) = x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \varepsilon_2(t)(\Delta t)^2, \tag{2}$$

$$\Delta x(t) = x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + x'''(t)\frac{(\Delta t)^3}{6} + \varepsilon_3(t)(\Delta t)^3, \tag{3}$$

. . . .

16 .21 . شكل منحن بجوار نقطة عادية أو شاذة. تبين المساواة 16 .71(1) ان كل منحن L معادلته $x = x(t)$ يطابق مماسه، عندما يكون $x'(t) \neq 0$ ، تطابقا بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الاولى بالنسبة لـ Δt . اما المساواة 16 .71(2) فتبين ان المنحنى L يقع في المستوى المعرف بالشعاعين $x'(t)$ وَ $x''(t)$ وهذا بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الاولى؛ يسمى هذا المستوى حسب التعريف 16 .71 ـ ب (في الحالة التي يكون فيها $x'(t)$ وَ $x''(t)$ مستقلين خطيا) المستوى الملاصق للمنحنى عند النقطة M. إذا كان ξ وَ η هما الاحداثيتين في المستوى الملاصق بالنسبة للأساس $x'(t)$ ، $x''(t)/2$ ، فإننا نحصل انطلاقا من 16 .71(2) على التمثيل الوسيطي للمنحنى L بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثانية:

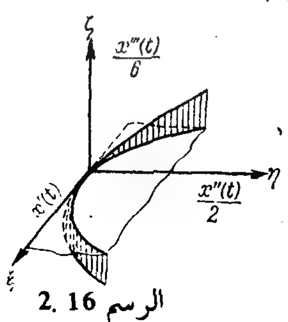
$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2$$

إذن فإنه يأتي من التوضيح الوارد بأن المنحنى L قطع مكافيء في المستوى الملاصق معادلته $\eta = \xi^2$.

يسمى الفضاء الجزئي المعرف بالاشعة $x'(t), x''(t)/2, x'''(t)/6$ (في

حالة استقلالها الخطي) الفضاء الجزئي الملاصق الثلاثي البعد للمنحنى L عند النقطة $\bar{M}$ (16 .71 ـ ب). نرى في 16 .71(3) ان المنحنى L يقع، بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة، في الفضاء الجزئي الملاصق الثلاثي البعد المنسوب اليه. إذا كانت ξ ، η ، ζ هي الاحداثيات في هذا الفضاء الجزئي بالنسبة للأساس $x'(t)\ x''(t)/2,\ x'''(t)/6$ فإننا نستنتج من نفس المساواة 16 .71(3) التمثيل الوسيطي للمنحنى L بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة:

$$\xi = \Delta t, \quad \eta = (\Delta t)^2, \quad \zeta = (\Delta t)^3$$



الرسم 16 .2

نحصل على منحن ايسري (الرسم 16 .2) إن مسقطه على مستوى الاحداثيات ξ ، η هو القطع المكافيء الذي سبق اعتباره $\eta = \xi^2$. اما مسقطه على مستوى الاحداثيات ξ ، ζ فهو المنحنى من الدرجة الثانية $\zeta = \xi^3$ (الذي ننظر اليه انطلاقا من نهاية الشعاع $\frac{1}{2}x''(t)$). واما مسقطه على مستوى الاحداثيات η ، ζ فهو القطع المكافيء نصف المكعب $\zeta = \eta^{3/2}$ (الذي ننظر اليه انطلاقا من نهاية الشعاع $x'(t)$).

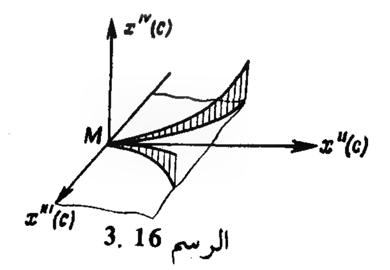
نعتبر الآن المنحنى L بجوار نقطة شاذة c ، حيث $x'(c) = 0$ لكن $x''(c) \neq 0$ و $x'''(c) \neq 0$. يعطينا دستور تايلور عندئذ:

$$\Delta x(c) = \frac{1}{2}x''(c)\,\Delta t^2 + \frac{1}{6}x'''(c)\,\Delta t^3 + \varepsilon_3(t)\,\Delta t^4$$

وهكذا نرى، بتقدير لا متناه في الصغر من الرتبة الثالثة، ان المنحنى L يقع في المستوى المعرف بالشعاعين $x''(c)/2$ ، $x'''(c)/6$ ومعادلته في هذا المستوى هي $\zeta = \eta^{3/2}$. إذا احتفظنا باللامتناهيات في الصغر من

الرتبة الرابعة فإن ذلك يضيف الحد المكمل $\frac{1}{24} x^{IV}(c) \Delta t^4$ (من اجل $x^{IV}(c) \neq 0$) الذي يثبت ان المنحنى يبتعد عن المستوى $x''(c), x'''(c)$ في نصف الفضاء المشار اليه بالشعاع $x^{IV}(c)$ (الرسم 3.16). نلاحظ انه بما ان اشارة Δt^4 ثابتة فإن فرعي النقطة الرأسية يبتعدان عن المستوى في نفس نصف الفضاء.

وهكذا نرى في حالة نقطة شاذة c حيث $x'(c) = 0$ وَ $x''(c) \neq 0$ ، $x'''(c) \neq 0$ ، ان النقطة الشاذة M نقطة رجوع.



الرسم 3.16

16 .91 . طول قوس. قدم تعريف طول قوس منحن $x(t)$ في 36.9 . نعيد تقديم هذا التعريف ونستنتج منه الدستور المقابل المتعلق بمنحن في فضاء نظيمي كيفي. عرفنا طول قوس منحن كنهاية اطوال الخطوط المضلعية المرسومة من داخل المنحنى عندما يتصاغر طول كل قطعة مستقيمة لا نهائياً. بعبارة أدق، لتكن:

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

تجزئة للمجال $[a, b]$ مع العلم ان هناك تابعا $x(t)$ معرفا على $[a, b]$. تقابل كل نقطة t_i نقطة $M_i = x(t_i)$ من المنحنى. بوصل النقاط M_i بقطع مستقيمة نحصل على خط مضلعي L_Π طوله هو $\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i|$. نفرض ان التابع $x(t)$ قابل للاشتقاق باستمرار لا نهائيا على المجال $[a, b]$. حينئذ:

$$\Delta x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t)\, dt = x'(t_i)\, \Delta t_i + \varepsilon_i \Delta t_i,$$

حيث :

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\Delta t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [x'(t) - x'(t_i)]\, dt;$$

$$|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon_\Pi \equiv \max_{|t-\bar{t}| \leqslant d(\Pi)} |x'(t) - x'(\bar{t})|$$

نظرا للإستمرار المنتظم للتابع $x'(t)$، فإن هذه الكمية تؤول الى الصفر من اجل تقسيم لا متناه للتجزئة Π . لدينا إذن التقدير :

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta x_i| - \sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)|\,\Delta t_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i|\,\Delta t_i \leqslant \varepsilon_\Pi (b-a)$$

ثم إن المجموع $\sum_{i=0}^{n-1} |x'(t_i)|\,\Delta t_i$ يؤول، من اجل تقسيم لا متناه للتجزئة Π ، الى النهاية

$$\int_a^b |x'(t)|\, dt, \qquad (1)$$

لأن التابع العددي $|x'(t)|$ يكون مستمرا بمجرد ان يكون التابع الشعاعي $x'(t)$ مستمراً. ومنه يأتي ان نهاية اطوال الخطوط المضلعية المرسومة من داخل المنحنى موجودة وتساوي التكامل (1). نلاحظ ان لدينا في الفضاء R_n ، $|x'(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} [x'_k(t)]^2}$، وهو الدستور المقابل للدستور الذي وجدناه في 9 .36(5) ؛ كما نلاحظ خلافا لـِ 9 36(5) ان العبارة(1) قائمة في كل فضاء نظيمي.

إذا عوضنا b بـِ t و t بـِ τ نحصل على العبارة الخاصة بطول قوس منحن L باعتبار المجال $[a, t]$ كمجال تغير الوسيط τ :

$$s(t) = \int_a^t |x'(\tau)|\, d\tau$$

نرى ان $s(t)$ تابع غير متناقص لـِ t ومستمر وقابل للإشتقاق؛ زيادة على ذلك، لدينا :

$$s'(t) = |x'(t)|$$

وذلك حسب 9 .13 .

إذا لم تكن للمنحنى L نقاطا شاذة، أي إذا لم ينعدم $x'(t)$ عند اية نقطة، فإننا نستطيع تطبيق النظرية الخاصة بالتابع المقلوب؛ يوجد إذن

تابع مقلوب $t = t(s)$ مستمر ومتزايد وقابل للإشتقاق باستمرار. بعد ذلك يمكننا وضع التابع $x(t)$ على شكل تابع لـِ s، مستمر وقابل للإشتقاق باستمرار. يسمى طول القوس s وسيطا طبيعياً. إذا اعطي المنحنى L بتابع $x = x(s)$ للوسيط الطبيعي s فإن:

$$| x'(s) | = s'(s) = 1$$

وذلك بفضل (1).

وهكذا نحصل عند كل نقطة غير شاذة للمنحنى L على ان الشعاع $x'(s)$ طوله 1. (هذا امر واضح من وجهة النظر الحركية: إذا مثل الوسيط s في آن واحد المسافة المقطوعة والزمن المستغرق في ذلك فإن سرعة الحركة تساوي الوحدة.)

§ 16 .2 . الانحناء، الانحناءات من الرتب العالية.

16 .12 . نهتم فيما يلي ليس باطوال الاشعة فحسب بل بالزوايا التي تشكلها هذه الاشعة أيضا. من الطبيعي إذن الآ نعتبر فضاء نظيمياً كيفياً بل نعتبر فضاء هيلبرتيا (12 .14).

توطئة. ليكن $x(t)$ وَ $y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ تابعين قابلين للاشتقاق قيمهما في فضاء هيلبرتي H ؛ يكون عندئذ التابع العددي $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ قابلا للإشتقاق ايضا، ولدينا:

$$\varphi'(t) = (x'(t), y(t)) + (x(t), y'(t)) \qquad (1)$$

البرهان. لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - (x(t), y(t)) = \\ &= (x(t) + x'(t)\Delta t + \varepsilon_1\Delta t, y(t) + \\ &+ y'(t)\Delta t + \varepsilon_2\Delta t) - (x(t), y(t)) = \\ &= [(x'(t), y(t)) + (x(t), y'(t))]\Delta t + \varepsilon_3\Delta t,\end{aligned}$$

حيث $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t, \Delta t) \to 0$ لما $\Delta t \to 0$. يمكننا إذن عزل الجزء الخطي للتزايد $\Delta\varphi$. إذا كتبنا ذلك صراحة فإننا نحصل على الدستور (1).

نتيجة. إذا بقي طول الشعاع $x(t)$ ثابتا عندما يتغير t، فإن الشعاع

$x'(t)$ والشعاع $x(t)$ متعامدان.

ذلك ان تطبيق دستور الاشتقاق (1) على $(x(t), x(t))$ يعطي:

$$0 = (x(t), x(t))' = 2(x(t), x'(t))$$

وهو المطلوب.

22. 16 . نعتبر منحنيا $L = \{x = x(s)\}$ وسيطه هو طول قوس محسوبا ابتداء من نقطة ثابتة. كما رأينا في 91. 16 فإن الشعاع $e_1(s) = x'(s)$ واحدي.

إن كان الشعاعان $x'(s)$ وَ $x''(s)$ مستقلين خطيا فإنه يوجد مستو ملاصق. ينتمي الشعاع $e_1'(s) = x''(s)$ الى المستوى الملاصق وهو، كما رأينا، عمودي على $e_1(s)$. يسمى ذلك الشعاع شعاع انحناء المنحنى L عند النقطة s . نضع

$$e_1'(s) = \varkappa(s)\, e_2(s) \tag{1}$$

حيث $e_2(s)$ شعاع واحدي عمودي على $e_1(s)$ ، والمعامل $\varkappa(s)$ موجب. لدينا:

$$\varkappa(s) = |e_1'(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{e_1(s+\Delta s) - e_1(s)}{\Delta s} \right| \tag{2}$$

إن طويلة فرق الشعاعين الواحديين $e_1(s+\Delta s)$ وَ $e_1(s)$ هي وتر دائرة الوحدة وتمثل لامتناهيا في الصغر يكافيء الزاوية التي يشكلها هذان الشعاعان، أي زاوية مماسي المنحني L عند النقطتين المنسوبتين للقيمتين s و $s + \Delta s$ على التوالي. وهكذا فإن المعامل $\varkappa(s)$ يعطي سرعة دوران المماس بالنسبة لتغير طول القوس. يسمى العدد $\varkappa(s)$ انحناء المنحنى L عند النقطة s .

نشير الى ان الدستور (2) يمثل تعريفا اعم من الدستور (1) لأن (2) لا يتطلب الشرط $e_1'(s) \neq 0$ ، يكفي ان يكون $e_1'(s)$ موجوداً. في الحالة التي يكون فيها $e_1'(s) = 0$ فإن الدستور (2) يعطي انحناء منعدما في النقطة المعتبرة.

16 .32 . لنستنتج الدستور المتعلق بالانحناء في الحالة التي يكون فيها المنحنى L معطى بمعادلة $x = x(t)$ حيث t كيفي. بما أن $s_t = |x_t| = \sqrt{(x_t, x_t)}$ حسب (16 .91) فإن :

$$s_{tt} = \frac{(x_t, x_{tt})}{\sqrt{(x_t, x_t)}} = \frac{(x_t, x_{tt})}{|x_t|}$$

وذلك حسب التوطئة 16 .12 .

لدينا بعد ذلك :

$$x_s = x_t t_s, \quad x_{ss} = x_{tt} t_s^2 + x_t t_{ss} = \frac{x_{tt}}{s_t^2} + x_t \left(\frac{1}{s_t}\right)_t \frac{1}{s_t} =$$

$$= \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t}{s_t^2} \frac{s_{tt}}{s_t} = \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t (x_t, x_{tt})}{|x_t|^4}$$

واخيراً

$$\varkappa(s) = |x_{ss}| = \left| \frac{x_{tt}}{|x_t|^2} - \frac{x_t (x_t, x_{tt})}{|x_t|^4} \right|$$

يعتمد هذا الدستور على التعريف 16 .22(2). وبالتالي فهو قائم في الحالتين $\varkappa(s) \neq 0$ و $\varkappa(s) = 0$.

بنقل قيمة الانحناء في دستور تايلور 16 .71(2) (مع $e_1'(s) \neq 0$) يصبح هذا الاخير.

$$\Delta x(s) = x'(s) \Delta s + x''(s) \frac{\Delta s^2}{2} + \varepsilon_2(s) \Delta s^2 =$$

$$= e_1(s) \Delta s + \frac{1}{2} \varkappa(s) e_2(s) \Delta s^2 + \varepsilon_2(s) \Delta s^2 \qquad (2)$$

16 .42 . لنحسب انحناء الدائرة. باستخدام الاحداثيات المرتبطة بمستوى الدائرة، تكتب معادلة الدائرة على الشكل:

$$x(t) = \{R \cos t, \ R \sin t\}$$

بالإشتقاق نحصل على:

$$x_t = \{-R \sin t, \ R \cos t\}, \quad |x_t| = R,$$

$$x_{tt} = \{-R \cos t, \ -R \sin t\}, \quad (x_t, x_{tt}) = 0$$

ومنه يأتي:

$$\varkappa(s) = \frac{|x_{tt}|}{|x_t|^2} = \frac{1}{R},$$

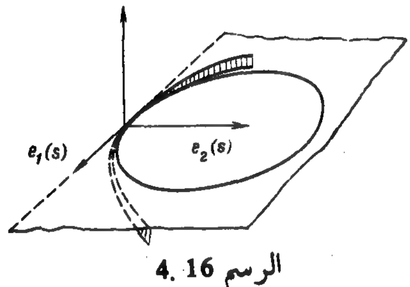
وبالتالي فإن انحناء الدائرة هو مقلوب نصف قطرها.

52. 16 . ليكن الآن $L = \{x = x(s)\}$ منحنيا ايسريا. إذا اعتبرنا في المستوى الملاصق دوائر مختلفة ماسة للمنحنى L ، فإن الانحراف بين نقطة من المنحنى والنقطة المقابلة لها على كل دائرة Q هو عموما من الرتبة الثانية في الصغر بالنسبة لـِ Δs . نحاول، باختيار مناسب لنصف قطر الدائرة الماسة الحصول على انحراف من الرتبة الثالثة بدل الثانية. لتكن $z = z(s)$ معادلة دائرة ماسة، بالوسيط الطبيعي s وبشعاع انحناء اتجاهه هو الاتجاه الخاص بـِ L (الرسم 4.16). لدينا عندئذ حسب الدستور 32.16 (2):

$$\Delta x(s) = e_1(s)\,\Delta s + \frac{1}{2}\varkappa(s)\,e_2(s)\,\Delta s^2 + \varepsilon_2 \Delta s^3,$$

$$\Delta z(s) = e_1(s)\,\Delta s + \frac{1}{2R}\,e_2(s)\,\Delta s^2 + \bar{\varepsilon}_2 \Delta s^3,$$

حيث ε_2 وَ $\bar{\varepsilon}_2$ لا متناهيان في الصغر لما $\Delta s \to 0$ ؛ تُحل المسألة المطروحة إذن إذا وضعنا $R = \frac{1}{\varkappa(s)}$. إن الدائرة الماسة الواقعة في المستوى الملاصق للمنحنى L ، عند النقطة s والتي لها شعاع انحناء اتجاهه هو الاتجاه الخاص بـِ L ، ونصف قطرها $R = \frac{1}{\varkappa(s)}$ ، تسمى **الدائرة الملاصقة** ويسمى مركزها مركز انحناء المنحنى L عند النقطة s . يسمى العدد $R = \frac{1}{\varkappa(s)}$ **نصف قطر انحناء** المنحنى L عند النقطة s . إن كان المنحنى L دائرة فإن نصف قطر انحنائه يطابق حسب 42.16 نصف قطره المعتاد



الرسم 4.16

62. 16 . **الاساس الطبيعي.** نفرض من اجل كل نقطة معطاة M من المنحنى L ان الاشعة: $x'(s), x''(s), \ldots, x^{(n)}(s)$ موجودة ومستقلة خطيا. عندئذ توجد عند هذه النقطة الفضاءات الجزئية الملاصقة:

$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n$ ابعادها على التوالي: $1, 2, \ldots, n$. ننشيء اساسا متعامدا ومتجانسا للفضاء E_n . نختار في البداية الشعاعين اللذين تم إنشاؤهما: $e_1(s) = x'(s)$ وَ $e_2(s) = \frac{x''(s)}{|x''(s)|}$. اما الشعاع الثالث $e_3(s)$ الذي نختاره في الفضاء الجزئي E_3 فيجب ان يكون عمودياً على المستوى E_2 وله اتجاه الشعاع $x'''(s)$. بالنسبة لهذا المستوى. بطريقة مماثلة، بعد اختيار الـ $m-1$ شعاعا $e_1(s), \ldots, e_{m-1}(s)$ ، ننشيء في الفضاء الجزئي E_m الشعاع $e_m(s)$ العمودي على الفضاء الجزئي E_{m-1} والذي له اتجاه الشعاع $x^{(m)}(s)$ بالنسبة لهذا الفضاء الجزئي. تعين هذه الشروط بكفية وحيدة الاساس $e_1(s), \ldots, e_n(s)$. يتبين من هذا الانشاء ان كل شعاع $e_m(s)$ عبارة خطية من الاشعة $x'(s), \ldots, x^{(m)}(s)$:

$$e_m(s) = \varphi_1(s)\, x'(s) + \ldots + \varphi_m(s)\, x^{(m)}(s) \qquad (1)$$

حيث $\varphi_m(s) > 0$.

يسمى الاساس $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ الاساس الطبيعي للمنحنى L عند النقطة M . من الواضح ان هذا الاساس يتغير موقعه بتغير النقطة M .

16 .72 . دساتير فريني (Frénet). لنبحث عن دساتير اشتقاق اشعة الاساس الطبيعي لمنحن $L \subset R_n$ بالنسبة للوسيط s . باشتقاق المساواة 16 .62(1) وباستخدام القاعدة 16 .12 ـ ص نجد :

$$e'_m(s) = \sum_{j=1}^{m} \varphi'_j(s)\, x^{(j)}(s) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(s)\, x^{(j+1)}(s)$$

وبالتالي ينتمي الشعاع $e'_m(s)$ (من اجل $m < n$) الى الفضاء الجزئي E_{m+1} ومنه:

$$e'_m(s) = a_{m1}(s)\, e_1(s) + \ldots + a_{mm}(s)\, e_m(s) + a_{m,\,m+1}(s)\, e_{m+1}(s) \qquad (2)$$

من اجل $m = n$ فإن الدستور (2) قائم عندما نعوض e_{n+1} بـ 0 .

نستنتج من (1) وَ (2) و 16 .62(1) بسهولة ان:

$a_{m,\,m+1} = \varphi_m(s) > 0$. اما المعاملات الاخرى في (2) فهي تحسب

ايضا بسهولة. لدينا في البداية $a_{mm}(s) \equiv 0$ لان مشتق الشعاع الواحدي $e_m(s)$ عمودي عليه (12.16). ثم باشتقاق المساواة البديهية $(e_j(s), e_m(s)) = 0$ ، حيث $(j < m)$، نحصل على:

$$(e'_j(s), e_m(s)) + (e_j(s), e'_m(s)) = 0$$

ومنه

$$(e'_m(s), e_j(s)) = -(e'_j(s), e_m(s)) \qquad (3)$$

إن هذه العبارة منعدمة من اجل $j < m - 1$ لأن $e'_j(s) \in E_{j+1}$

وهكذا تأخذ العلاقة (2) الشكل:

$$e'_m(s) = a_{m,\,m-1}(s)\,e_{m-1}(s) + a_{m,\,m+1}(s)\,e_{m+1}(s) \qquad (4)$$

من اجل $j = m - 1$، ينتج من (3) ان:

$$a_{m,\,m-1} = (e'_m(s), e_{m-1}(s)) = -(e'_{m-1}(s), e_m(s)) = -a_{m-1,\,m}$$

نضع $\varkappa_1 \equiv \varkappa_1(s) = (e'_1(s), e_2(s)) = a_{12}$ ؛ رمزنا لهذه العبارة فيما سبق بـ $\varkappa(s)$. ثم نضع $\varkappa_2 \equiv \varkappa_2(s) = (e'_2, e_3)$ ، $\varkappa_3 \equiv \varkappa_3(s) = (e'_3, e_4)$ الخ. وبذلك نصل الى جملة دساتير:

$$\left.\begin{aligned} &e'_1(s) = \varkappa_1 e_2(s), \\ &e'_2(s) = -\varkappa_1 e_1(s) + \varkappa_2 e_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &e'_{n-1}(s) = -\varkappa_{n-1} e_{n-2}(s) + \varkappa_{n-1}(s)\, e_n(s), \\ &e'_n(s) = -\varkappa_{n-1} e_{n-1}(s) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

المسماة دساتير فريني في R_n . تسمى الكميات

$$\varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$$

انحناءات المنحنى L عند النقطة M من الرتب $2, 3, \ldots$ على التوالي؛ إن كل هذه الكميات موجبة حسب الانشاء. يسمى الانحناء الثاني $\varkappa_2$s التواء (أولي) المنحنى عند النقطة M.

لنبرز المعنى الهندسي للمعاملات $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$. تبين المساواة

$$e'_m(s) = -\varkappa_{m-1} e_{m-1}(s) + \varkappa_m e_{m+1}(s)$$

ان سرعة دوران الشعاع $e_m(s)$ لها مركبتان: الاولى وفق الشعاع

$e_{m-1}(s)$ (وهي تحدد دوران الفضاء الجزئي E_m في نفسه) والثانية وفق الشعاع $e_{m+1}(s)$ (وهي توافق الدوران في الاتجاه العمودي على E_m)، يمثل المعامل $\varkappa_m$ سرعة هذا الدوران الاخير (زاوية الدوران المنسوبة الى القوس المرسوم). وهكذا فإن الالتواء هو سرعة دوران المستوى الملاصق للشعاع e_2 نحو الشعاع e_3 .

يمكن إذن فهم العدد $\varkappa_m$ على انه سرعة دوران الفضاء الجزئي E_m في الاتجاه العمودي عليه، كما ان الانحناء $\varkappa_1$ يمثل هندسيا سرعة دوران المماس (16 .22(1)). كما هو الحال بالنسبة للتعريف الاخير، فإن التعريف الهندسي لـِ $\varkappa_m$ اعم من التعريف المعتمد على دساتير فريني ويتطلب أن يكون الفضاء E_{m+1} غير منحل: إنه لا يتطلب سوى عدم انحلال الفضاء E_m ووجود المشتق $x^{(m+1)}(s)$. إذا كان $x^{(m+1)}(s) = 0$ فإن الفضاء E_m له سرعة دوران منعدمة عند النقطة المعتبرة، ويعطي التعريف الهندسي لـِ $\varkappa_m$ قيمة منعدمة.

16 .82 . حساب الانحناءات ذات الرتب العالية. من وجهة النظر الجبرية يُعرف **الجداء المختلط** لـِ n شعاعا $a_1, \ldots, a_n$ في فضاء اقليدي، يرمز لهذا الجداء بـِ $[a_1, \ldots, a_n]$ ، على انه عدد يساوي حجم متوازي الوجوده، ذي البعد n ، الذي ينشأ على هذه الاشعة. إذا عبرنا عن الاشعة $a_1, \ldots, a_n$ بدلالة احداثياتها ضمن اساس متعامد ومتجانس فإن العدد $[a_1, \ldots, a_n]$ يساوي المعين ذي الرتبة n الذي تتشكل اعمدته من احداثيات الشعاع الموافق لرقم العمود [14؛ 8 .47] .

لنحسب الجداء المختلط للأشعة $x_s, x_{ss}, \ldots, x_s^{(n)}$. نستعمل لهذا الغرض الدساتير:

$$x_s = x_t t_s,$$
$$x_{ss} = \ldots + x_{tt} t_s^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_s^{(n)} = \ldots\ldots\ldots + x_t^{(n)} t_s^n$$

وهي تعبّر عن المشتقات بالنسبة لـِ s بدلالة المشتقات بالنسبة لأي

وسيط آخر؛ تعوض النقاط في هذه الدساتير الاشعة التي تكتب كعبارات خطية الواردة قبلها صراحة. ينتج من خاصيات المعينات أن:

$$[x_s, \ldots, x_s^{(n)}] = [x_t, \ldots, x_t^{(n)}]\, t_s^{1+\cdots+n} \tag{1}$$

من جهة اخرى نعلم ان الدساتير الآتية قائمة:

$$x_s = e_1,$$
$$x_{ss} = \varkappa_1 e_2,$$
$$x_{sss} = \ldots + (\varkappa_1 e_2)_s = \ldots + \varkappa_1 \varkappa_2 e_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_s^{(n)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varkappa_1 \ldots \varkappa_{n+1} e_n$$

حيث تعوض النقاط في هذه الدساتير ايضا عبارات خطية للاشعة الواردة صراحة في الاسطر السابقة. لدينا بشكل مماثل:

$$[x_s, \ldots, x_s^{(n)}] = \varkappa_1^{n-1}\varkappa_2^{n-2} \ldots \varkappa_{n-1} [e_1, \ldots, e_n] = \varkappa_1^{n-1}\varkappa_2^{n-2} \ldots \varkappa_{n-1} \tag{2}$$

بمقارنة (1) وَ (2) نحصل على المساواة:

$$\varkappa_1^{n-1}\varkappa_2^{n-2} \ldots \varkappa_{n-1} = [x_t, \ldots, x_t^{(n)}]\, t_s^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n)}]}{|x_t|^{\frac{n(n+1)}{2}}} \tag{3}$$

التي تسمح بايجاد $\varkappa_{n-1}$ حسب $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2}$. لدينا من اجل $n = 2$ دستور الانحناء:

$$\varkappa_1 = \frac{[x_t, x_{tt}]}{|x_t|^3} \tag{4}$$

الذي يبدو ابسط من دستور 32.16 . الواقع ان الدستور الجديد (4) ليس فعالا الاّ في حالة منحن مستو، عندما يمكن وضع الكمية $[x_t, x_{tt}]$ في شكل معين واحد من الرتبة الثانية. نذكّر في الحالة العامة ان مربع حجم متوازي الوجود ذي البعد m المنشأ على الاشعة

$$x_k = \{x_{k1}, \ldots, x_{kn}\} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

لفضاء بعده يساوي مجموع مربعات كافة المعينات من الرتبة m لمصفوفة احداثيات الاشعة x_k [37.8؛ 14].

في حالة $n > 2$ ، نقسم طرفا طرفا الدستور (3) على الدستور المماثل:

$$\varkappa_1^{n-2}\varkappa_2^{n-3} \ldots \varkappa_{n-2} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]}{|x_t|^{\frac{(n-1)n}{2}}}$$

فنحصل على:

$$\varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-1} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]} \frac{1}{|x_t|^n} \qquad (5)$$

ثم إذا قسمنا هذا الدستور طرفا طرفا على الدستور المماثل:

$$\varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_{n-2} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-2)}]} \frac{1}{|x_t|^{n-1}}$$

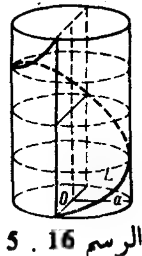
نحصل على:

$$\varkappa_{n-1} = \frac{[x_t, \ldots, x_t^{(n)}][x_t, \ldots, x_t^{(n-2)}]}{[x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}]^2 |x_t|}$$

يعني ذلك هندسيا ان الانحناء $\varkappa_{n-1}$ يساوي، بتقدير عام $|x_t|$ ، نسبة ارتفاع متوازي الوجوه ذي البعد n (المنشأ على الاشعة $x_t, \ldots, x_t^{(n)}$) على ارتفاع متوازي الوجوه ذي البعد $(n-1)$ (المنشأ على الاشعة $x_t, \ldots, x_t^{(n-1)}$).

مثال. نبحث عن انحناء والتواء حلزون في الفضاء الثلاثي البعد. يعرف حلزونا (الرسم 5. 16) بالمعادلة:

$$x(t) = \{a \cos t,\ a \sin t,\ bt\}$$



الرسم 16 . 5

نحصل بالاشتقاق على:

$$x_t = \{-a \sin t,\ a \cos t,\ b\},\quad |x_t| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$x_{tt} = \{-a \cos t,\ -a \sin t,\ 0\},\quad (x_t, x_{tt}) = 0,$$
$$x_{ttt} = \{a \sin t,\ -a \cos t,\ 0\},\quad [x_t, x_{tt}, x_{ttt}] = a^2 b$$

وينتج من ذلك حسب الدستور (4) أن:

$$\varkappa_1 = \frac{|x_{tt}|}{|x_t|^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

اخيرا بالنظر الى الدستور (3) يأتي:

$$\varkappa_1^2\varkappa_2 = \frac{[x_t, x_{tt}, x_{ttt}]}{|x_t|^6} = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^3},\qquad \varkappa_2 = \frac{b}{a^2+b^2}$$

§ 16 3 انحلال الاساس الطبيعي.

16 .13 . عرفنا ضمن 16 .71 الفضاءات الجزئية الملاصقة $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n$ للمنحنى $x = x(t)$ في الحالة التي تكون فيها الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ موجودة ومستقلة خطيا. نعتبر الحالة التي يكون هذا الشرط الاخير غير متوفر.

إذا اصبحت الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ غير مستقلة خطيا عند نقطة t مع بقاء الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$ مستقلة خطياً) فإن الفضاء E_n غير موجود على الرغم من بقاء وجود الفضاء E_{n-1} . تفقد الكمية $\varkappa_n(t)$ معناها وكذلك الامر فيما يخص الشعاع $e_n(t)$. نستطيع محاولة انشاء الشعاع $e_n(t)$ بالاستمرار وذلك بالانتقال الى النهاية $\bar{t} \to t$ في $e_n(\bar{t})$ (عندما تكون $x'(\bar{t}), \ldots, x^{(n)}(\bar{t})$ مستقلة خطيا) لكنه يمكن ان يؤدي الانتقال الى النهاية وفق $\bar{t} \nearrow t$ ($\bar{t}$ متزايدة) ووفق $\bar{t} \searrow t$ ($\bar{t}$ متناقصة) الى قيمتين مختلفتين. لتكن C ، مثلا ، نقطة انعطاف منحن مستو (الرسم 16 .6)؛ عندئذ يتحول الشعاع $e_2(t)$ فجأة عند المرور بهذه النقطة الى مقابله. نصطلح على اتمام تعريف التوابع $\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_n(t)$ بوضع قيمها مساوية للصفر في النقاط التي تكون فيها هذه التوابع غير معرفة؛ نلاحظ ان ذلك يتماشى مع اعتبارات 16 .72 .

16 .23 . **مثال** . ليكن مستقيما معرفا بالمعادلة

$$x(t) = x_0 + tx_1 \qquad (1)$$

ينتج من (1) ان: $x'(t) = x_1$ و $x''(t) = 0$ (2)

وعليه فإن المستوى الملاصق غير موجود؛ وبالتالي فإن انحناء مستقيم انحناء منعدم حسب اصطلاحنا.

بالعكس، نفرض ان انحناء منحن $x = x(t)$ مطابق للصفر أي ان

الشعاعين $x'(t)$ و $x''(t)$ غير مستقلين خطيا (و $x'(t) \neq 0$).
لنثبت أن هذا المنحنى مستقيم. إن عدم الاستقلال الخطي للشعاعين $x'(t)$ و $x''(t)$ يعني $x''(s) = 0$ لأن $x''(s)$ يكتب على شكل عبارة خطية لـ $x'(t)$ و $x''(t)$ وهو عمودي على $x'(t)$. حينئذ يكون $x'(s)$ شعاعا ثابتا (حسب النظرية المثبتة في 12 .16 ـ ق: إذا كان مشتق تابع شعاعي مطابقا للصفر فإن التابع ثابت) وواحديا، كما هو الحال لكل شعاع من الشكل $x'(s)$. نرمز له بـ x_1، $|x_1| = 1$.
بمكاملة المعادلة $x'(s) = x_1$ وبمراعاة وحدانية الحل (الناتج دوما من النظرية 12 .16 ـ ق) نجد:

$$x(s) = x_0 + sx_1$$

وهو المطلوب.

16 .33 . هناك حالة اكثر تعقيدا وهي الحالة التي يقع فيها المنحنى باكملة في مستو مصعد بعده n. يحوي هذا المستوى المصعد كل الاشعة $x'(t), x''(t), \ldots$ وبالتالي فإن الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n+1)}(t)$ غير مستقلة خطيا. إذن فإن الانحناء $\varkappa_n(t)$ وكذا كل الانحناءات الموالية منعدمة. لنثبت ان القضية العكسية قائمة: إذا كان الانحنا من الرتبة n لمنحن L مطابقا للصفر، فإن كل المنحنى L يقع في مستو مصعد بعده n.

يعني الفرض ان الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n+1)}(t)$ غير مستقلة خطيا من اجل كل t، $a \leqslant t \leqslant b$:

$$x^{(n+1)}(t) = a_0(t)\, x'(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\, x^{(n)}(t) \qquad (1)$$

نفرض أن الاشعة $x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ تبقى مستقلة خطيا على كل المجال $a \leqslant t \leqslant b$. يمكننا إذن اثبات ان كل المعاملات $a_k(t)$ في (1) مستمرة بمجرد استمرار التابع $x^{(n+1)}(t)$. بالفعل، بضرب المساواة(1) سلمياً في $x'(t)$، ...، $x^{(n)}(t)$ نحصل على جملة معادلات

خطية بالنسبة للمعاملات:

$$(x^{(n+1)}(t), x'(t)) = a_0(t)(x_t, x_t) + \dots + a_{n-1}(t)(x_t^{(n)}, x_t),$$

. . . .

$$(x^{(n+1)}(t), x^{(n)}(t)) = a_0(t)(x_t, x_t^{(n)}) + \dots + a_{n-1}(t)(x_t^{(n)}, x_t^{(n)})$$

إن كل معاملات هذه الجملة مستمرة (كجداءات سلمية لتوابع مستمرة)، اما معينها فهو غير منعدم بصفته معين غرام (Gramm) لجملة اشعة مستقلة خطيا [17. 8; 14]. ينتج من دساتير كرامر (Cramer) المتعلقة بالحلول $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ ان هذه الحلول مستمرة على $[a, b]$.

يوجد بفضل 56. 13 حل $y(t)$ للمعادلة

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)\, y(t) + \dots + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) \qquad (2)$$

ينتمي، حسب 66. 13، الى الفضاء الجزئي المولد عن الاشعة:

$y_0 = y(a), \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}(a)$. نضع هنا $y_0 = x'(a)$، $\dots, y_{n-1} = x^{(n)}(a)$. بما ان التابع الشعاعي $x'(t)$ يحقق المعادلة (2) (التي تعطي (1) بعد التعويض $x'(t) = y(t)$) والشروط الابتدائية المشار اليها، فإن الشعاع $x'(t)$ يبقى حسب 66. 13، في الفضاء الجزئي المولد عن الاشعة $x'(a), \dots, x^{(n)}(a)$ من اجل كل t ينتمي الشعاع:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\xi)\, d\xi$$

من اجل كل $t \in [a, b]$ الى المستوى المصعد المار بالنقطة $x(a)$ الموازي للفضاء المحصل عليه. بذلك اثبتنا النظرية التالية:

نظرية. ليكن $L = \{x = x(t)\}$ منحنيا في فضاء هيلبتري H. نفرض ان الاشعة $x'(t), \dots x^{(n)}(t)$ مستقلة خطيا والاشعة $x'(t), \dots x^{(n+1)}(t)$ غير مستقلة خيطا، وذلك من اجل كل $t \in [a, b]$. عندئذ ينتمي المنحنى L الى المستوى المصعد المار بالنقطة $x(a)$ والمعرف بالاشعة $x'(a), \dots, x^{(n)}(a)$

بصفة خاصة، اذا كان الالتواء $\varkappa_2(t)$ للمنحنى L مطابقا للصفر والانحناء غير منعدم فإن المنحنى L منحن مستو.

§ 16 .4 . المعادلات الطبيعية

16 .14 . ليكن L منحنيا و s وسيطه الطبيعي. يمكننا اعتبار كل الانحناءات كتوابع لـ s:

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(s),\ \varkappa_2 = \varkappa_2(s),\ \ldots,\quad 0 \leqslant s \leqslant s_0$$

نسلّم بانعدام الانحناءات اي وجود الانحلال الوارد في 16 .13 .

اذا استنتج منحن $\bar{L}$ من المنحنى L بتحويل خطي ايزومتري (أي يحتفظ بكل المسافات) في الفضاء H فإن كل التوابع $\varkappa_m(s)$ ، $m = 1, 2, \ldots$ معينة تماما بالمسافة، وتبقى هي نفسها من اجل المنحنى $\bar{L}$. لنثبت ان القضية العكسية قائمة من اجل المنحنيات ذات الابعاد المنتهية:

نظرية. ليكن L و $\bar{L}$ منحنيين في الفضاء R_n ذي البعد n ممثلين بتوابع شعاعية قابلة للإشتقاق n مرة. اذا كانت الانحناءات $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ مستمرة وموجبة وتكتب بدلالة التوابع المطابقة للوسيط الطبيعي s فإنه يوجد تحويل ايزومتري (ازاحة قد تستكمل بتناظر) للفضاء R_n في نفسه يحوّل المنحنى L الى المنحنى L .

البرهان. ليكن $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ الاساس الطبيعي للمنحنى L و $\bar{e}_1(s), \ldots, \bar{e}_n(s)$ et اساس $\bar{L}$. نعتبر ازاحة (قد يتبعها تناظر) للفضاء R_n تحوّل الموقع الابتدائي $\bar{e}_1(0), \ldots, \bar{e}_n(0)$ للأساس الطبيعي لـ $\bar{L}$ الى الموقع الابتدائي $e_1(0), \ldots, e_n(0)$ للاساس الطبيعي لـ L ، بحيث ان $\bar{e}_1(0)$ يصبح $e_1(0)$ ، ... ، و $\bar{e}_n(0)$ يصبح $e_n(0)$. لنثبت ان هذا التحويل للفضاء R_n يحوّل $\bar{L}$ الى L .

إن التوابع $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ مستمرة فرضا. يوجد

إذن، حسب النظرية 13 .36 ، حل وحيد للجملة:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} y_1'(s)=\varkappa_1(s)\,y_2(s),\\ y_2'(s)=-\varkappa_1(s)\,y_1(s)+\varkappa_2(s)\,y_3(s),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n'(s)=-\varkappa_{n-1}(s)\,y_{n-1}(s) \end{array}\right\}$$

مع الشروط الابتدائية:

$$(2)\qquad y_1(0)=e_1(0),\ \dots,\ y_n(0)=e_n(0)$$

ثم إنه يتبين من دساتير فريني 16 .72 (5) ان الاشعة $e_1(s), \dots, e_n(s)$ وكذا الاشعة $\overline{e_1}(s), \dots, \overline{e_n}(s)$ (بعد ازاحتها) تحقق الجملة (1) مع الشروط الابتدائية (2)؛ وبالتالي:

$$e_1(s)\equiv\overline{e_1}(s),\ \dots,\ e_n(s)\equiv\overline{e_n}(s)$$

وهذا حسب النظرية 13 .36 .

نرمز بـ $x=x(s)$ لنصف قطر شعاع المنحنى L و بـ $\overline{x}(s)$ لنصف قطر شعاع $\overline{L}$ (بعد ازاحة). بما ان للمنحنيين L و $\overline{L}$ نفس نقطة البدء $x(0)$ الآن، فإن لدينا:

$$\overline{x}(s)=x(0)+\int_0^s\overline{e_1}(\xi)\,d\xi=x(0)+\int_0^s e_1(\xi)\,d\xi=x(s)$$

وهكذا فإن المنحنى $\overline{L}$ مطابق للمنحنى L .

تسمى المعادلات:

$$\varkappa_1=\varkappa_1(s),\ \dots,\ \varkappa_{n-1}=\varkappa_{n-1}(s)$$

المعادلات الطبيعية للمنحنى L ؛ كنا رأينا انها تعين المنحنى L في الفضاء ذي البعد n وهذا بتقدير تحويل خطي ايزومتري لهذا الفضاء.

16 .14 . المنحنيات ذات الانحناءات المعطاة

أ . نظرية. لتكن $\varphi_1(s)>0$ ، ... ، $\varphi_{n-1}(s)\geq 0$ $(0\leqslant s\leqslant s_0)$ $n-1$ تابعا مستمرا كيفيا، إنه بالامكان انشاء تابع شعاعي $x=x(s)$ قيمة في R_n يقبل الاشتقاق باستمرار n مرة بحيث تمثل التوابع $\varphi_k(s)$ ، باعتبار المنحنى $L\subset R_n$ المعرف المعادلة

$x = x(s)$ ، الانحناءات المتوالية بدلالة طول القوس :

$$\varphi_1(s) = \varkappa_1(s), \ldots, \varphi_{n-1}(s) = \varkappa_{n-1}(s)$$

ب. نثبت في البداية التوطئة العامة التالية:

توطئة: نعتبر في R_n المعادلة الشعاعية

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)\, y(t)$$

حيث $A(t)$ مؤثر لا متناظر (أي ان كل عناصر المصفوفة $A(t) = \| a_{jk}(t) \|$ تغير اشارتها بعد ابدال: $a_{jk}(t) = -a_{kj}(t)$).

إن المصفوفة الحالة $\Omega_{t_0}^t$ متعاملدة (أي ان المصفوفة المنقولة لـِ $\Omega_{t_0}^t$ مطابقة لمصفوفتها المقلوبة)

البرهان. رأينا في 13 .83 ـ ر ان المؤثر $\Omega_{t_0}^t$ يحقق المعادلة:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} = A(t)\, \Omega_{t_0}^t \qquad (1)$$

مع الشرط الابتدائي $\Omega_{t_0}^{t_0} = I$. من جهة اخرى، لدينا حسب 13 .83 ـ د

$$\Omega_{t_0}^t \Omega_t^{t_0} = I$$

باشتقاق هذه المساواة بالنسبة لـِ t نجد:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^t}{dt} \Omega_t^{t_0} + \Omega_{t_0}^t \frac{d\Omega_t^{t_0}}{dt} = 0$$

أو:

$$A(t)\, \Omega_{t_0}^t \Omega_t^{t_0} + \Omega_{t_0}^t \frac{d\Omega_t^{t_0}}{dt} = 0$$

ومنه:

$$\frac{d\Omega_t^{t_0}}{dt} \Omega_t^{t_0} = -\Omega_t^{t_0} A(t)$$

بالانتقال الى المؤثرات القرينة نجد [14 ؛ 7 .46]

$$\frac{d(\Omega_t^{t_0})'}{dt} = -A'(t)\, (\Omega_t^{t_0})'$$

نستعمل الآن الشرط $A'(t) = -A(t)$ لنجد:

$$\frac{d(\Omega_t^{t_0})'}{dt} = A(t)\, (\Omega_t^{t_0})'$$

نقارن هذه المعادلة بـِ (1) ونظرا لكون المؤثر $(\Omega_t^{t_0})'$ يحقق نفس

الشرط الابتدائي $(\Omega_{t_0}^{t_0})' = I' = I$ الذي يحققه $\Omega_{t_0}^{t}$ فإننا نحصل:

$$(\Omega_t^{t_0})' = \Omega_{t_0}^{t} \qquad (2)$$

وهذا بفضل وحدانية الحل. لكن: $\Omega_t^{t_0} = (\Omega_{t_0}^{t})^{-1}$. تثبت المساواة (2) إذن بأن $\Omega_{t_0}^{t}$ مؤثر متعامد، وهو المطلوب.

جـ. نعتبر الآن جملة المعادلات الشعاعية

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(s) = \varphi_1(s)\, y_2(s), \\ y_2'(s) = -\varphi_1(s)\, y_1(s) + \varphi_2(s)\, y_3(s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(s) = -\varphi_{n-1}(s)\, y_{n-1}(s) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$y_1(0) = e_1, \ldots, y_n(0) = e_n$$

حيث $e_1, \ldots, e_n$ n شعاعا كلها متعامدة ومتجانسة كيفية في الفضاء R_n .

لنبرهن على ان التوابع الشعاعية $y_1(s), \ldots, y_n(s)$ التي تمثل حلا للجملة (3) (هذا الحل موجود في R_n حسب النظرية 13 .36) توابع متعامدة ومتجانسة من اجل كل $s \in [0, s_0]$.

يتبين من التوطئة ب أن المصفوفة $\| \omega_{jk}(s) \|$ للمؤثر الحال Ω_0^s للجملة (3) متعامدة، بحيث أن:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{jk}(s)\, \omega_{pk}(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = p, \\ 0 & \text{pour } j \neq p \end{cases}$$

لدينا:

$$y_j(s) = \sum \omega_{jk}(s)\, e_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

بما أن الاساس $e_1, \ldots, e_n$ متعامد ومتجانس فإن:

$$(y_j(s),\ y_p(s)) = \sum_k \omega_{jk}(s)\, \omega_{pk}(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = p \\ 0 & \text{pour } j \neq p \end{cases}$$

وهو المطلوب.

وهكذا يتضح أن الاشعة $y_j(s)$ متعامدة ومتجانسة من اجل كل s

في $[0, s_0]$.

د . نواصل بوضع:

$$x(s) = \int_0^s y_1(\sigma)\, d\sigma$$

نحصل على منحن L في الفضاء R_n ذي البعد n . بما أن: $|x'(s)| = |y_1(s)| = 1$ فإن الوسيط s هو طول قوس المنحنى L . ثم إن الاشعة $y_1(s), \ldots, y_m(s)$ متعامدة ومتجانسة من اجل كل $m = 1, 2, \ldots, n$ ، وتكتب $x^{(m)}(s) = y_1^{(m-1)}(s)$ خطياً بدلالة $y_1(s), \ldots, y_m(s)$ وذلك حسب الجملة (3) مع العلم أن معامل $y_m(s)$ موجب (يساوي $\varphi_{m-1}(s)$)؛ وبالتالي فإن الاشعة $y_1(s), \ldots, y_n(s)$ هي أشعة الاساس الطبيعي للمنحنى L من اجل كل s . الآ أن لدينا دساتير فريني 72.16'(5) بخصوص أشعة أساس طبيعي:

$$y_1'(s) = \varkappa_1(s)\, y_2(s)$$
$$y_2'(s) = -\varkappa_1(s)\, y_1(s) + \varkappa_2(s)\, y_3(s)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n-1}'(s) = -\varkappa_{n-1}(s)\, y_n(s)$$

بمقارنة هذه الدساتير بالمعادلات (3) نتوصل على التوالي الى العلاقات:

$$\varphi_1(s) \equiv \varkappa_1(s), \quad \varphi_2(s) \equiv \varkappa_2(s), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(s) \equiv \varkappa_{n-1}(s)$$

انتهى برهان النظرية.

§ 5. 16 . الحلزونات

15. 16 . أ . تعريف. الحلزون هو تعريفا منحن كل انحناءاته ثابتة.

ب. من البديهي أن المستقيم يتوفر فيه هذا الشرط (انحناءات المستقيم منعدمة). رأينا في المستوى (42. 16) ان انحناء دائرة نصف قطرها R ثابت ويساوي $\varkappa = 1/R$ ؛ اما انحناءاتها العالية فهي منعدمة. وهكذا يتوفر شرط التعريف السابق أيضا في الدائرة. لنثبت انه لا توجد حلزونات اخرى في المستوى. إذا كان L منحنيا مستويا انحناؤه ثابت $\varkappa > 0$ ، نعتبر

بجانبه الدائرة Q التي نصف قطرها $R = 1/\varkappa$ والتي لها ايضا انحناء ثابت $\varkappa$. يتبين من النظرية 14.16 اننا نستطيع جعل المنحنى L يطابق الدائرة Q ، وبالتالي فإن المنحنى L هو ايضا دائرة.

ج. اما في الفضاء الثلاثي البعد فإن الحلزون المعروف (« الكلاسيكي ») Q :

$$x_1 = a \cos t, \; x_2 = a \sin t, \; x_3 = bt \qquad (1)$$

له، كما ورد في 82.16 ، انحناء والتواء ثابتان وهما يحسبان بواسطة الدستورين:

$$\varkappa_1 = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (2)$$

وبالتالي فإن Q حلزون بمفهوم تعريفنا. لنثبت انه لا توجد حلزونات اخرى في R_3 . ليكن L حلزونا في R_3 بحيث $\varkappa_1 > 0$ ، $\varkappa_2 > 0$. ننطلق من (2) ونعين الوسيطين a وَ b بدلالة $\varkappa_1$ وَ $\varkappa_2$ ، من السهل ان نرى بأن:

$$a = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}, \quad b = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2}$$

بعد ذلك ننشيء الحلزونة (1). انحناء هذا الحلزون هو $\varkappa_1$ والتواؤه هو $\varkappa_2$. نستخدم النظرية 14.16 فنرى انه بالإمكان جعل المنحنى L مطابقا للحلزون (1) وهذا بازاحة في الفضاء R_3 ، وهوالمطلوب.

25.16 . لنبحث عن الحلزونات في فضاء بعده n . حلزون R_n هو منحنى انحناءاتــه $\varkappa_1(s) = \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}(s) = \varkappa_{n-1}$ ثــابتـة وغير منعدمة. تحقق الاشعة $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ جملة معادلات فريني 72.16 (5):

$$\left.\begin{array}{l} e_1'(s) = \varkappa_1 e_2(s), \\ e_2'(s) = -\varkappa_1 e_1(s) + \varkappa_2 e_3(s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{n-1}'(s) = -\varkappa_{n-2} e_{n-2}(s) + \varkappa_{n-1} e_n(s), \\ e_n'(s) = -\varkappa_{n-1} e_{n-1}(s) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

مع العلم ان مصفوفة المعاملات مصفوفة ثابتة:

$$K = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \varkappa_1 & & & & \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 & & & \\ & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & -\varkappa_{n-2} & 0 & \varkappa_{n-1} \\ & & & & -\varkappa_{n-1} & 0 \end{array} \right\|$$

لنحسب مرتبة المصفوفة K . بتشطيب االطر والعمود اللذين يحويان العنصر $\varkappa_1$ نخفض المرتبة بوحدة، ثم نخفضها بوحدة ثانية بتشطيب السطر والعمود اللذين يحويان العنصر $\varkappa_1$ ؛ نحصل عندئذ على المصفوفة:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & \varkappa_3 & & & & \\ -\varkappa_3 & 0 & \varkappa_4 & & \cdot & \\ & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & -\varkappa_{n-2} & 0 & \varkappa_{n-1} \\ & & & & -\varkappa_{n-1} & 0 \end{matrix}\right\|$$

وهي مصفوفة لها بنية المصفوفة الاولى لكن مرتبتها اصغر من وحدتين بمواصلة هذه العملية نجد انفسنا امام احتمالين: إن كان $n = 2m$ زوجياً فإن المرتبة تساوي n، وإن كان $n = 2m + 1$ فردياً نحصل في الاخير على المصفوفة الوحيدة البعد التي عنصرها منعدم وبالتالي فإن مرتبة المصفوفة الاولى تساوي $2m = n - 1$.

من الواضح ان المصفوفة الاولى لامتناظرة: فهي تغير اشارتها إثر كل أبدال (أو نقل). نستخدم نظرية معروفة حول بنية مؤثر لا متناظر [64. 9. 14]. إذا كان $n = 2m$ زوجياً، يوجد في الفضاء R_n اساس قانوني متعامد ومتجانس: $x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m$ بحيث:

$$\begin{matrix} Kx_1 = \tau_1 y_1, & Kx_2 = \tau_2 y_2, \ldots, & Kx_m = \tau_m y_m \\ Ky_1 = -\tau_1 x_1, & Ky_2 = -\tau_2 x_2, \ldots, & Ky_m = -\tau_m x_m \end{matrix}$$

يوجد من اجل $n = 2m + 1$ شعاع اساسه z_n يتحقق من اجله:

$$Kz_n = 0$$

بما ان مرتبة المصفوفة K تساوي $2m$. فإن الاعداد $\tau_1, \ldots, \tau_m$ هي الراهنة غير منعدمة.

نعتبر الى جانب الجملة الشعاعية (3) الجملة السلمية:

$$\left.\begin{aligned} u_1'(s) &= \varkappa_1 u_2(s), \\ u_2'(s) &= -\varkappa_1 u_1(s) + \varkappa_2 u_3(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n'(s) &= -\varkappa_{n-1} u_{n-1}(s). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

تقبل هذه الجملة n حلا شعاعياً مستقلا خطيا، وهذه الاشعة موازية على التوالي، من اجل $s=0$ ، للاشعة القانونية للمصفوفة K .

ننشيء مصفوفة المؤثر الحال e^{tK} . بفضل 41.13 ـ ج (وَ 41.13 ـ أ) لدينا ضمن الاساس $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m (z_n)$.

$$e^{tK}=\left\|\begin{matrix} \cos t\tau_1 & -\sin t\tau_1 & \ldots & & \\ \sin t\tau_1 & \cos t\tau_1 & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \ldots & \cos t\tau_m & -\sin t\tau_m \\ & & \ldots & \sin t\tau_m & \cos t\tau_m \end{matrix}\right\|.$$

إذا وضعنا:

$$\begin{gathered} x_j=(x_{j1}, \ldots, x_{jn}),\ y_j=(y_{j1}, \ldots, y_{jn}), \\ x_j(s)=(x_{j1}(s), \ldots, x_{jn}(s)),\ y_j(s)=(y_{j1}(s), \ldots, y_{jn}(s)), \\ j=1, \ldots, n, \\ z_n=(z_{n1}, \ldots, z_{nn}),\ z_n(s)=(z_{n1}(s), \ldots, z_{nn}(s)) \end{gathered} \quad (5)$$

عندئذ تعطى الدساتير 51.13 ـ ج (و13 .58 ـ أ):

$$\begin{aligned} & x_{jk}(s)=\cos\tau_j s\cdot x_{jk}+\sin\tau_j s\cdot y_{jk}, \quad (k=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, m) \\ & y_{jk}(s)=-\sin\tau_j s\cdot x_{jk}+\cos\tau_j s\cdot y_{jk}, \\ & z_{nk}(s)=z_{nk} \qquad\qquad (n=2m+1) \end{aligned}$$

لتكن الآن $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ حلا للجملة (3) يمكن ان نرمز لها بـ:

$$e_j(s)=(e_{j1}(s), \ldots, e_{jn}(s))$$

من اجل p مثبت، تحقق التوابع $e_{jp}(s)$ $(j=1, \ldots, n)$ الجملة (4) لنشترط على الحل $\{e_{jp}(s)\}$ ان يحقق الشروط الابتدائية:

$$\begin{aligned} & e_{11}(0)=x_{11}, \ldots, e_{n1}(0)=x_{1n}, \\ & e_{12}(0)=y_{11}, \ldots, e_{n2}(0)=y_{1n}, \\ & e_{13}(0)=x_{21}, \ldots, e_{n3}(0)=x_{2n}, \\ & e_{14}(0)=y_{21}, \ldots, e_{n4}(0)=y_{2n}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & e_{1n}(0)=z_{n1}, \ldots, e_{nn}(0)=z_{nn} \quad (n=2m+1) \end{aligned}$$

إن الاشعة $e_1(0), \ldots, e_n(0)$ متعامدة ومتجانسة (وهو امر ضروري لايجاد منحنى انطلاقا من معرفة انحناءاته، 24.16 ـ ج). لدينا بصفة خاصة:

$$\begin{aligned} e_1(s) & =(e_{11}(s), \ldots, e_{1n}(s))=(x_{11}(s), y_{11}(s), x_{21}(s), y_{21}(s), \ldots, (z_{n1}(s)))= \\ & =(\cos\tau_1 s\cdot x_{11}+\sin\tau_1 s\cdot y_{11}, -\sin\tau_1 s\cdot x_{11}+\cos\tau_1 s\cdot y_{11}, \ldots, (z_{n1})) \end{aligned}$$

لم نعتبر الكمية الا من اجل $n = 2m + 1$.

نحصل بالمكاملة بالنسبة لِـ s (ثوابت المكاملة التي تمثل الانسحابات على طول كل محور نختارها منعدمة) على:

$$r(s) = \left(\frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} - \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} y_{11}, \ \frac{\cos \tau_1 s}{\tau_1} x_{11} + \frac{\sin \tau_1 s}{\tau_1} y_{11}, \ \ldots, (z_{n1} s)\right)$$

يمكن كتابة هذه الدساتير بكيفية اكثر بساطة:

$$r(s) = (A_1 \cos \tau_1 (s - s_1), \ A_1 \sin \tau_1 (s - s_1), \ A_2 \cos \tau_2 (s - s_2), \ A_2 \sin \tau_2 (s - s_2), \ \ldots, (C_n s)) \quad (6)$$

من اجل n زوجي، $n = 2m$ ، فان كل المنحنى L يوجد بطبيعة الحال على سطح الكرة:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_m^2$$

يكون المنحنى مغلقا وان كانت كل الاعداد $\tau_1, \ldots, \tau_m$ قابلة للقياس (اي إن كانت مضاعفات ناطقة لاحدها) ويكون غير مغلق (وليس له نقطة مزدوجة اي مضاعفة مرتين) إذا كان هناك على الاقل عددين τ_j وَ τ_k غير قابلين للقياس. من اجل $n = 2m + 1$ فإن المنحنى (6) ليس محدوداً؛ فهو يذهب الى لانهاية بالاحداثيات x_{2m+1} لما $t \to +\infty$.

16 .35 . الحلزونات في الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية. نشير باديء ذي بدء الى الامر التالي. ليكن L منحنيا في R_n نفرض، من اجل كل نقطة معطاة A (المصدر) ونقطة اخرى p على هذا المنحنى، انه توجد ازاحة للفضاء (قد تتبع بتناظر) تحوِل المنحنى L الى نفسه وهذا بالاحتفاظ باتجاه تغير الوسيط وبتحويل النقطة A الى النقطة p . عندئذ، بما ان كل ازاحة للفضاء تحتفظ بالمسافة فان كل انحناءات المنحنى L عند النقطتين A وَ p متساوية على التوالي هذا إن كان المنحنى مرنا بكفاية). بما ان النقطة p كيفية فإن كل الانحناءات للمنحنى L ثابتة؛ وبالتالي فالامر يتعلق بحلزون. وبالعكس، من اجل كل نقطتين A وَ p لحلزون L

معطى في R_n ، يوجد بفضل 14.16 ازاحة للفضاء R_n (قد تتبع بتناظر) تحوّل الحلزون L الى نفسه وذلك بالاحتفاظ باتجاه تغيّر الوسيط وبتحويل النقطة A الى P .

وهكذا يقودنا الامر الى تعريف جديد للحلزون؛ إنه منحنى L يمكن تحويله الى نفسه بازاحة للفضاء (قد ترفق بتناظر) تحتفظ باتجاه تغيّر الوسيط ويحوّل نقطة A معطاة على L الى نقطة اخرى p معطاة على L . نلاحظ ان هذا التعريف لا يتطلب من L اية قابلية اشتقاق نقول عن منحنى يتمتع بالخاصية المذكورة انه **متطابق ذاتيا** .يمكن البرهان في R_n على ان صنف الحلزونات مطابق لصنف المنحنيات المتطابقة ذاتياً (انظر التمرين 2).

يتضح في فضاء ذي بعد غير منته، انه توجد منحنيات متطابقة ذاتيا ومستمرة، لكنها بدون مماس. نقتصر هنا على مثال لمنحنى متطابق ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي، لكنه من نوع خاص.

مثال (« لولب فينار Wiener »). نعتبر الفضاء $H_2\,(0, \infty)$ المشكل من التوابع $x\,(\tau)$ الحقيقية المستمرة بتقطيع على نصف المستقيم $0 \leqslant \tau < \infty$ التي تنعدم خارج مجال $[0, a]$ (يتعلق بالتابع $x\,(\tau)$). نزود هذا الفضاء بجداء سلمي وبنظم حسب الدساتير :

$$(x\,(\tau),\ y\,(\tau)) = \int_0^\infty x\,(\tau)\, y\,(\tau)\, d\tau,$$

$$\|\, x\,(\tau)\, \|^2 = \int_0^\infty x^2\,(\tau)\, d\tau\,;$$

نلاحظ ان الحد الاعلى لمجال المكاملة في التكاملين السابقين هو ∞ لكننا نكامل في الواقع على مجال منته. نعتبر من اجل كل $t \in [0, \infty)$ عنصرا من الفضاء $H_2\,(0, \infty)$ وفق القاعدة:

$$Z\,(t) \equiv z\,(t,\ \tau) = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0 \leqslant \tau \leqslant t. \\ 0 \text{ pour } \tau > t. \end{cases} \tag{1}$$

إذا تغير t من 0 الى ∞ فإن النقطة $Z\,(t)$ ترسم في الفضاء

$H_2(0, \infty)$ منحنيا L يسمى لولب فينار. إن هذا المنحنى مستمر (بانتظام) لأن:

$$\|Z(\bar{t})-Z(t)\|^2=\left|\int_t^{\bar{t}} 1^2\cdot d\tau\right|=|\bar{t}-t|.$$

لنثبت ان المنحنى L متطابق ذاتيا. ليكن عنصراً t_0 بحيث $0<t_0<\infty$. نعتبر التحويل U من الفضاء $H_2(0, \infty)$ في نفسه المعرف بالدستور:

$$x(\tau) \to Ux(\tau) = z(t_0, \tau) + x(\tau - t_0)$$

(من اجل $\tau<t_0$ نضع $x(\tau-t_0)=0$).

إن هذا التحويل ايزومتري لأن:

$$\|Ux(\tau)-Uy(\tau)\|^2=\|x(\tau-t_0)-y(\tau-t_0)\|^2=$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}[x(\tau-t_0)-y(\tau-t_0)]^2\,d\tau=\int_0^{\infty}[x(\tau)-y(\tau)]^2\,d\tau=\|x(\tau)-y(\tau)\|^2$$

يطابق نقطة المصدر $Z(0)$ للمنحنى مع صفر الفضاء $H_2(0, \infty)$. يحول التحويل U هذه النقطة الى النقطة $Z(t_0)$. إن كل نقطة $Z(t)$ من المنحنى L تحوّل بواسطة U الى النقطة $Z(t+t_0)$ المنتمية لنفس المنحنى. إذن فإن المنحنى L متطابق ذاتيا.

لنثبت الآن التابع $Z(t)$ ليس له مشتق في الفضاء $H_2(0, \infty)$ ذلك ان الشعاع:

$$\frac{Z(t+h)-Z(t)}{h}=\frac{z(\tau, t+h)-z(\tau, t)}{h} \qquad (2)$$

يوافق التابع لـ τ المساوي لـ 0 من اجل $\tau \notin [t, t+h]$ ولـ $1/h$ من اجل $\tau \in [t, t+h]$. نظيم هذا الشعاع هو $1/\sqrt{h}$ بحيثان النسبة (2) ليست لها نهاية لما $h \to 0$.

يتمتع المنحنى L بخاصية هامة اخرى: إن كل وترين موافقين لمجالين غير متقاطعين من مجال تغير الوسيط، هما وتران متعامدان فيما بينهما. ذلك

لأن:

$$(Z(t+h)-Z(t),\ Z(s+k)-Z(s))=$$

$$=\int_0^\infty [z(t+h,\tau)-z(t,\tau)][z(s+k,\tau)-z(s,\tau)]\,d\tau=0$$

وهذا إن كان المجالين $(t, t+h)$ وَ $(s, s+k)$ غير متقاطعين.

يمكن ان ننشيء منحنيات مرنه مماثلة للولب فينار إذا عوضنا التابع $z(\tau, t)$ في (1) بمسحوب (عدد t على طول محور العناصر τ) لتابع قابل للإشتقاق مثبت $\varphi_0(\tau)$.

بخصوص مثل هذه التوابع المرنة، يمكننا حساب الانحناءات حسب قواعدنا المعتادة سنجد بطبيعة الحال ان كل هذه الانحناءات ثابتة.

تمارين

1 . أثبت ان المحلي الهندسي لمراكز الانحناءات لحلزون في R_3 يمثل ايضا حلزونا له نفس المحور، وان المحل الهندسي لمراكز انحناءات الحزون الاخير هو الحلزون الاول.

2 . أثبت ان كل منحن متطابق ذاتيا في R_n حلزون (وذلك بدون افترامض قابلية الاشتقاق المستمر).

3 . ننشىء صلة تقابلية بين نقاط منحنيين في R_n بحيث تكون أشعة الاساسين الطبيعين عند نقطتين متقابلتين بواسطة هذه الصلة، متوازية على التوالي. لتكن $\varkappa_j^{(1)}$ ، $\varkappa_j^{(2)}$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$) انحناءات هذه ين المنحنيين، أثبت أن:

$$\frac{\varkappa_1^{(1)}}{\varkappa_1^{(2)}} = \frac{\varkappa_2^{(1)}}{\varkappa_2^{(2)}} = \ldots = \frac{\varkappa_{n-1}^{(1)}}{\varkappa_{n-1}^{(2)}}$$

4 . سطح الكرة الملاصق S_m (في الفضاء ذي البعد m) لمنحن ايسري L هو سطح الكرة في الفضاء ذي البعد $m+1$ المعرف بالاشعة البالغ عددها $(m+1)$ في الاساس الطبيعي بحيث يكون انحراف نقطة من المنحنى L عن سطح الكرة هذه ذا رتبة صغر مساوية لـ Δs^{m+2} . أثبت أن نصف القطر r_m لسطح الكرة الملاصق (في الفضاذ ذي البعد m) لا يتناقص عندما يتزايد m .

5 . (« منخنى بيانو »). ليكن: $t = 0,\ t_1t_2 \ldots t_{2n-1}t_{2n} \ldots$ النشر الثلاثي المشكل من الرمزين 0 وَ 2 لعدد $t \in [0, 1)$ ، أثبت أن التابعين $x(t) = 0,\ t_1t_3 \ldots t_{2n-1} \ldots$ وَ $y(t) = 0,\ t_2t_4 \ldots t_{2n} \ldots$ وحيدتا القيمة على مجموعة كل العناصر t من الشكل المشار اليه وانهما يقبلان تمديداً مستمرا على المجال [1,0]. أثبت ان المنحنى $r(t) = \{x(t), y(t)\}$ يمر بكل نقاط المربع $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$.

نبذة تاريخية

فيما يخص الفضاء الثلاثي البعد فإن المعادلات الاساسية لنظرية المنحنيات أعطيت من طرف سيرى (Serret) (1851) وفريني (1852)، وقام جوردان بتعميم هذه المعادلات الى حالة فضاء ذي n بعدا (1874). وصف فورسيث (Forsythe) (1930) الحلزونات في R_n . تلعب الحلزونات المتطابقة ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي دورا هاما في النظرية الحديثة لعلم الاحتمال حيث تسمى « الكيفيات العرضية (أو الستوكاستيكية) للتزايدات المستقرة» (وهي نصف بعض الظواهر الحقيقية مثل الحركة البروينية والحركة المتوترة للسوائل، الخ، راجع في هذا السياق [17] وَ [7]). درس العديد من كبار علماء عصرنا مثل فينار، فون نومان (Von Neumann)، كولموغوروف Kolmogorov ، م. كرين M.Ksfjo1) خاصيات مختلفة لهذه المنحنيات. حدد كولموغوروف الشكل القانوني لمنحن متطابق ذاتيا في الفضاء الهليلبرتي، اما كرين فقد اكتشف ان كل « قوس حلزوني » أي جزء منته من منحن متطابق ذاتيا، يكمن تمديده بعدة طرق حتى يصبح يشكل منحنياً متطابقا ذاتيا وكاملا، كما صنف كل التمديدات الممكنة. تعود أعمال المؤلفين السابق ذكرهم، حول المنحنيات المتطابقة ذاتيا في الفضاء الهيلبرتي الى السنوات 1939 ـ 1943 .

حلول واشارات اليها

الفصل 12 .

1 . الجواب. نعم في الحالتين أ). وَ ب)، لا في الحالة ج).

2 . اشارة. إن لمجموعة كل المتتاليات المتزايدة المؤلفة من الاعداد الالطبيعية قوة المستمر (الفصل 2، تمرين 8). اختر بخصوص كل متتالية من هذا النوع ($n_1 < n_2 < \ldots$) تابعا $x(t) \in R^s(0, \infty)$ يساوي الوحدة عند النقاط $n_1, n_2, \ldots$ وينعدم عند القنانقاط الطبيعية الاخرى.

3 . شارة. لو وجد تابعا لكانت قيمته 1 في $0 < x < 1/2$ وَ 1− في $1/2 < x < 1$.

4 . اشارة. يجب اثبات ان (x, y) يحقق مسلمات الجداء السلمي 12 .14 . بخصوص المسلمة 12 .14 ـ د، طبق التوطئة الخاصة بمتوازي الوجوه على متوازيات الوجوه المنشأة على الأشعة $x+z$ ، y ؛ $x-z$ ، y ؛ $y+z$ ، x ؛ $y-z$ ، x . بخصوص المسلمة 12 .14 ـ ج، اعتبر في البداية عددا α من الاعداد الصحيحة [ثم من الاعداد الكسرية] واخيرا من الاعداد الكيفية وانتقل الى النهاية.

5 . اشارة. لدينا حسب نظرية كوشي $\int_{|z|=1} p(z)\, dz = 0$. تبقى هذه المساواة قائمة عند الانتقال الى النهاية.

6 . اشارة. ضع $F = \prod_{f \in I} \{x \in Q : f(x) = 0\}$. أثبت ان كل تابع $g(x) \in R^s(Q)$ منعدم بجوار المجموعة F ينتمي الى المثالي I . ثم ان كل تابع $f(x) \in R^s(Q)$ منعدم عله F هو نهاية توابع من الشكل $g(x)$.

7 . اشارة. ليكن $\delta > 0$ عددا يوافق العدد $\varepsilon > 0$ حسب شرط تساوي

استمرار الجماعة E ، عندئذ تشكل قيم التوابع $x(t) \in E$ عند نقاط δ - شبكة منتهية من المتراص Q 2ε - شبكة شبه متراصة للمجموعة E .

8 . اشارة. يمكن دون المساس بعمومية المسألة، افتراض ان $\left|\sum_{m=1}^{\infty} t_{km}-1\right|<\delta$ وهذا مهما كان $k=1$ ، 2 ، ... . عرّف متتالية عددية N_1 ، N_2 ، ... ومتتالية عددية k_1 ، k_2 ، ... بحيث يكون:

$$\sum_{m=N_1}^{\infty}|t_{1m}|<\delta; \quad \sum_{m=1}^{N_1}|t_{k_1m}|<\delta; \quad \sum_{N_2}^{\infty}|t_{k_1m}|<\delta; \quad \sum_{1}^{N_3}|t_{k_2m}|<\delta, \ldots$$

ضع $\xi_n=1$ من اجل $N_{2p-1} \leqslant n < N_{2p}$ ومن اجل $N_{2p} \leqslant n < N_{2p+1}$ ، $p=1, 2, \ldots$.

9 . اشارة. يكفي اعتبار المتتاليات $x=\{\xi_n\}$ التي من اجلها يكون $\sup \xi_n = \overline{\lim}\, \xi_n = -\underline{\lim}\, \xi_n = -\inf \xi_n$.

10 . اشارة. استخدم نظرية الوحدانية ومبدأ الذروة (القيمة العظمى) الخاص بالتوابع التحليلية.

11 . اشارة. لا يمكن ان يكون لمؤثر الضرب في $\lambda - z$ مؤثر عكسي غير مؤثر الضرب في $1/(z-\lambda)$.

12 . اشارة. يمكن استنتاج من 78.12 أن طيف المؤثر A مؤلف فقط من القيم الذاتية المعممة. ثم يجب علينا استنتاج من: $(p(A)-p(\lambda)E)\, x_n \to 0$ العلاقة $(A-\lambda E)\, x_n \to 0$ ، $|x_n|=1$ واستخدام تراص $p(A)$ والشرط $p(\lambda) \neq 0$.

13 . اشارة. استخدم التمرين 12 .

14 . اشارة. يكفي اعتبار الحالة:

$$\int_a^b |x(t)|^p\, dt = \int_a^b |y(t)|^q\, dt = 1$$

كامل متراجحة يونغ (16.9 ـ ط):

$$|x(t)\, y(t)| \leqslant \frac{1}{p}|x(t)|^p + \frac{1}{q}|y(t)|^q$$

15 . اشارة. كامل المتراجحة:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)|(|f(x)|+|g(x)|)^{p-1}+|g(x)|(|f(x)+g(x)|)^{p-1}$$

وطبق متراجحة هولدر الواردة في الطرف الثاني (تمرين 14).

16 . اشارة. استخدم طريقة التمرين 14 . بتعويض المكاملة بالجمع.

17 . اشارة. مماثل للتمرين 15 .

18 . اشارة. إذا كانت المتتالية $x_n = \{\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots\} \in l_p$ متتالية كوشية فإن المتتالية العددية ξ_{nk} عند تثبيت k كوشية أيضا؛ ليكن $\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_{nk}$. من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد N بحيث، من اجل كل n و $m \geqslant N$ ، تتحقق المتراجحة $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{mk}| \leqslant \varepsilon$. عوض هنا ∞ بـ p وانتقل الى النهاية من اجل $m \to \infty$ ثم من اجل $p \to \infty$.

19 . اشارة. بتطبيق نظرية آرزيلا (42. 12 ـ د) أوجد متتالية جزئية متقاربة بانتظام، بتطبيق نظرية آرزيلا مرة أخرى على متتالية اكثر مرونة تكون فيها المشتقات متقاربة بانتظام، الخ.، اعتبر فيما بعد المتتالية الجزئية القطرية.

20 . اشارة. إن المجموعة $\{x \in R_n : \|x\|_p \leqslant 1\}$ غير محدبة.

21 . اشارة. بخصوص المجموعة $E \subset P(Q)$ المشكلة من تابع واحد $x(t)$ يمكن وضع $Q_k = \{t \in Q : k\varepsilon < x(t) \leqslant (k+1)\varepsilon\}$. طبق في الحالة العامة مقياس هوسدورف 3 .39 ـ ج.

الفصل 13

1 . اشارة. تأكد من شرط ليبشيتز.

2 . الجواب. (أ) قطع مكافىء، (ب) قطع مكافىء نصف تكعيبي.

3 . اشارة. استخدم عبارة الورونسكي (13 .47).

4 . تتحلل الجملة، ضمن اساس جورداني الى عدد من الجمل المستقلة

يساوي عدد الجذور المميزة. كل جملة تكافىء معادلة من الشكل: $\left(\frac{d}{dt}-\lambda\right)^m u(t) = 0$. اما الجملة بأكملها فهي تكافىء المعادلة:

$$\prod_k \left(\frac{d}{dt}-\lambda_k\right)^{m_k} u(t)=0$$

5 . اشارة. يحقق المؤثرات Ω_0^t وَ Ω_T^{t+T} نفس المعادلة ونفس الشرط الابتدائي.

6 . اشارة. عرّف المؤثر $A(t)$ على الفضاء الجزئي X_t المولد عن الاشعة: $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ بالشروط $u_k'(t) = A(t)\, u_k(t)$ (حيث $k = 1, \ldots, n$)، وضع على المكمل العمودي لِـ X_t $A(t)$ منعدما. تأكد من استمرار $A(t)$ بالنسبة لِـ t .

7 . الجواب. ممكن كمثال، من اجل $n = 2$ ، يمكن اختيار التابعين:

$$y_1(t)=\begin{cases} t^3 \text{ pour } t>0 \\ 0 \text{ pour } t<0 \end{cases}, \quad y_2(t)=y_1(-t)$$

8 . الجواب. مثلا:

$$\begin{vmatrix} y^{(n)}(t) & y^{(n-1)}(t) & \ldots & y(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_1(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)}(t) & y_n^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n(t) \end{vmatrix}=0$$

9 . اشارة. تأتي النتيجة، من اجل $m = 0$ ، من نظرية الوجود. ثم نتبع طريقة التدريج.

10 . اشارة. التعويض $y(t) = e^{kt}z(t)$

11 . اشارة. التعويض: $y(t) = k\int_0^t w(s)\, ds$

12 . اشارة. يحقق المتراجحة التالية

$$\left\| y(t) - y(0) - \int_0^t f(s, y(s))\, ds \right\| \leqslant \varepsilon t$$

استعمل حل التمرين 11 .

13 . اشارة. من اجل $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ ، لدينا:

$$y_{\Pi}(t)=\left\{(E+(t-t_k)A(t_k))\prod_{j=k-1}^{0}(E+A(t_j)\Delta t_j)\right\}y_0,$$

$$y'_{\Pi}(t)=\left\{A(t_k)\prod_{j=k-1}^{0}(E+A(t_j)\Delta t_j)\right\}y_0=$$

$$=A(t_k)[E+(t-t_k)A(t_k)]^{-1}y_{\Pi}(t)=$$

$$=A(t_k)[E+B_k(t)]y_{\Pi}(t)A(t)y_{\Pi}(t)+C_k(t)y_{\Pi}(t)$$

حيث تؤول المؤثرات $B_k(t)$ وَ $C_k(t)$ الى الصفر من اجل تقسيم لامنته للتجزئة Π .

14 . اشارة. استعمل حلي التمرينين 13 وَ 12 .

15 . اشارة. طبق طريقة التمرين 13 .

16 . اشارة. استخدم حلول التمرينين 15 وَ 12 .

الفصل 14

1 . اشارة. عوض في السلاسل المحصل عليها المتغير ببعض القيم العددية.

2 . اشارة. الاشارة السابقة.

3 . الجواب. (أ) $s(x)=e^{\cos x}\cos(x\sin x)$

(ب) $s(x)=e^{\cos x}\sin(x\sin x)$

4 . اشارة. تقبل هذه المجموعة شبه المتراصة نقطة نهاية وحيدة.

5 . اشارة. طبق نظرية المتوسط الثانية (تمرين 3 من الفصل 9).

6 . اشارة. عين بدقة مناسبة حل التمرين 5 .

7 .شارة. لدينا من اجل n زوجي

$$\frac{4}{\pi}b_n=\int_0^{\pi/2}f(t)\sin nt\,dt=\int_0^{\pi/n}f(t)\sin nt\,dt+\int_{\pi/n}^{\pi/2}f(t)\sin nt\,dt$$

ويكفي ان نبرهن على أن:

$$I_1=\int_0^{\pi/n}f(t)\sin nt\,dt=\frac{\beta_n}{n}f\left(\frac{\pi}{n}\right),\quad \beta_n\to 2$$

$$I_2=\int_{\pi/n}^{\pi/2}f(t)\sin nt\,dt=-\frac{1}{n}f\left(\frac{\pi}{n}\right)+\gamma_n,\quad \sum_1^{\infty}|\gamma_n|<\infty$$

نعوض في الحالة الاولى nt بـِ τ وفي الثانية نكامل بالتجزئة مع تطبيق نظرية المتوسط والتمرين 16 من الفصل 7 .

8 . اشارة. ضف$\infty = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right)$ الى الشروط 1) ـ 4) من التمرين 7 . استعمل التمرين 6 .

9 . اشارة. اكتب سلسلة فوريي للتابع $f(t)$ الوارد في التمرين 8 على شكل عقدي.

10 . اشارة. $(xQ_n, Q_k) = (Q_n, xQ_k)$ ، ثم إن xQ_k كثير حدود درجته أصغر من n ، وهذا من اجل $k < n - 1$، وبالتالي لدينا :

$$xQ_n(x) = \gamma_{n+1}Q_{n+1}(x) + \gamma_n Q_n(x) + \gamma_{n-1}Q_{n-1}(x) \qquad (1)$$

حيث γ_{n+1} ، γ_n ، γ_{n-1} ثوابت. قارن معاملات x^{n+1} وَ x^n واحسب (xQ_n, Q_{n-1}) .

11 . اشارة. اضرب (1) في $Q_n(t)$. بتعويض t بـِ x وَ x بـِ t اطرح المتطابقة المحصل عليها من المتطابقة السابقة. اجمع بالنسبة لـِ n .

12 . اشارة. تنتج الخاصية الاولى من التعامد على (1)، اما الثانية فتأتي من التعامد على كثير الحدود $\prod_{k=1}^{m}(x - x_k)$ وذلك فافتراض أن $x_1, \ldots, x_m$ كلها جذور لكثير الحدود $Q_n(t)$ وأن $m < n$.

الفصل 15 .

1 . اشارة. طبق طريقة التمرينين 5 وَ 6 من الفصل 14 .

2 . اشارة. استخدم فكرة حل التمرين 8 من الفصل 14 .

3 . اشارة. استخدم فكرة حل التمرين 9 من الفصل 14 .

4 . اشارة. تأكد من ذلك باعتبار توابع الصنف S (92.15 ـ أ)، ثم من اجل التابع $f_N(x)$ المساوي لـِ $f(x)$ من اجل $|x| \leqslant N$ وللصفر من اجل $|x| > N$ وذلك بأن نقربه بواسطة توابع الصنف S ، اجر الانتقال الى النهاية $N \to \infty$.

5 . اشارة. اعتبر التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |tx\,\varphi(x)+\varphi'(x)|^2\,dx \geqslant 0$ كثلاثي حدود من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط t .

6 . الجواب. $F_1(p)=F(p-a)$ ، $F_2(p)=pF(p)$ ، $F_3(p)=\frac{1}{p}F(p)$ ، $F_4(p)=-F'(p)$ ، $F_5(p)=\int_p^{\infty}F(s)\,ds$ ، حيث اخذنا التكامل على طول أي سبيل يبتعد الى لانهاية في نصف المستوى: $\mathrm{Re}\,p>\gamma_0$.

7 . الجواب. $\Phi_1(p)=\frac{1}{p-a}$ ، $\Phi_2(p)=\frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}$ ، $\Phi_3(p)=\frac{\Gamma(\alpha)}{(p-a)^{\alpha}}$ ، $\Phi_4(p)=\frac{a}{p^2+a^2}$ ، $\Phi_5(p)=\frac{p}{p^2+a^2}$ ، $\Phi_6(p)=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{p}$ (من اجل $p>0$).

8 . اشارة. ضع $x=e^t$.

الفصل 16

1 . بخصوص الحلزون $r=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ فإن حلزون مراكز الانحناء له b^2/a كنصف قطر مسقطه على المستوى الافقي.

2 . اشارة. إن التحويلات المتعامدة للتطابق الذاتي تتبادل فيما بينها، وعليه تقبل اساسا قانونيا مشتركا.

3 . اشارة. إن كل النسب المشار اليها تساوي $ds^{(1)}/ds^{(2)}$.

4 . اشارة. $S_{m-1}\subset S_m$.

5 . اشارة. استخدم النشر العشري لإحداثيتي نقطة معطاة في المربع.

الدليل العلمي

Algèbre	جبر
Commutative	تبديلي
de Gelfand	غالفوند
normée	نظيمي
quotient	النسبة
Alternative de Fredholm	متناوبة فريدولم
Application	تطبيق
Contractante	مقلص
Arzelà	ارزيلا
Ascoli	آسكولي
Banach	باناخ (أو بناخ)
Base	أساس
Jordanienne	جورداني
- réelle	ـ حقيقي
Naturelle	طبيعي
Orthonormée	متعامد ومتجانس
Bernoulli	بارنولي
Bourbaki	بورباكي
Bromwich	برومويش
Carleman	كارلمان
Carson	كارسون
Case jordanienne	خانة جوردانية
Cauchy	كوشي
Centre de Courbure	مركز انحناء
Cercle osculateur	دائرة ملاصقة
Cesàro	سيزارو
Classe	صف
d'équivalence	تكافؤ
S	*S*

W_M	W_M
W^{Ω}	Ω
Classes quasi analytiques	اصناف شبه تحليلية
Coefficients de Fourier	معاملات فوريي
Cowplété	تتمة
d'un espace hilbertien	فضاء هيلبرتي
- nromé	ـ نظيمي
Condition de Dini	شرط ديني
unilatérale	وحيد الجانب
Condition de Lipschitz	شرط ليبشيتز
d'ordre α	من الرتبة α
Convolution de fonctions	تزويج توابع
Corde	وتر
Symétrique	متناظرة
Courbe	منحن
autocongruente	متاطبق ذاتيا
de Peano	بيانو
dans R_n	في R_n
Courbure	انحناء
Courbures d'ordre supérieur	انحناءات من رتب عالية
Critére	مقياس (أو قاعدة)
d'Abel-Dirichlet	آبل ـ ديركليت
de Cauchy	كوشي
de Weierstrass	فيرشتراس
d'Alembert	دالمبار (أو دالمبير)
Demi-droite de Valiron	نصف مستقيم فاليرون
Denjoy	دنجوي
Dépendance Linéaire	عدم الاستقلال الخطي
Déterminant de Wronski	معين ورونسكي
Développement d'un vecteur	نشر شعاع
Suivaut une base	وفق أساس
Dini	ديني

Dirac	ديراك
Dirichlet	دير كليت
Distance	مسافة
Diviseur généralisé de zéro	قاسم معمم للصفر
Doetsch	دوتش -
Du Bois-Reymond	دي بوا ريمون
Egalité de Parseval	مساواة بارسفال
Elément	عنصر
inverse	مقلوب
opposé	مقابل
Engels	انغلس
Ensemble	مجموعة
absolument convexe	محدبة مطلقا
Convexe	محدبة
équilibré	متوازنة
partout dense	كثيفة اينما كان
Enveloppe convexe	مغلف محدب
fermée	مغلق
Epimorphisme	تماثل غامر
de l'algèbre	لجبر
Equation(s)	معادلة (معادلات)
Caractéristique	مميزة
differentielle	تفاضلية
- Linéaire homogène	ـ خطية متجانسة
- - non homogène	ـ ـ غير متجانسة
Naturelles	طبيعية
Espace(s)	فضاء (ات)
de Banach	باناخ ـ (أو باناخي)
Complexe	عقدي
dual	ثنوي
de Hilbert	هيلبرت (أو هيلبرتي)
- complexe	عقدي

métrique	متري
- Compact	ـ متراص
- précompact	ـ شبه متراص
- Séparable	ـ قابل للإنفصال
Normé	نظيمي
des opérateurs Linéaires	المؤثرات الخطية
Préhilbertien	شبه هيلبرتي
quotient	النسبة
réel	حقيقي
Vectoriel	شعاعي
- affine	ـ تآلفي
- Complexe	ـ عقدي
- de dimension infinie	ـ ذو بعد غير منته
-- n	ـ ـ n
- normé	ـ نظيمي
-- complexe	ـ ـ عقدي
-- réel	ـ ـ حقيقي
- réel	ـ حقيقي
$C^s(M)$	$C^s(M)$
$D_m(a,b)$	$D_m(a,b)$
K^n	K_n
$K(E)$	$K(E)$
$\mathbf{K}(E)$	$\mathbf{K}(E)$
l_p	l_p
$l^s(a,b)$	$L^s(a,b)$
$L_p^s(a,b)$	$L_p^s(a,b)$
$\mathrm{P}^s(\mathrm{M})$	$\mathrm{P}^s(\mathrm{M})$
$R(E)$	$R(E)$
$\mathrm{R}(e)$	$\mathrm{R}(E)$
$R^s(M)$	$R^s(M)$
$\mathbf{R}_n^s(M)$	$R_n^s(M)$
Euler	أولر

Famille Séparatrice des points	جماعة فاصلة لنقاط
Fonction	تابع
duale	ثنوي
entière de type exponen tiel fini	صحيح من النمط الاسي المنتهي
Séparatrice des points	فاصل لنقاط
à valeurs dans un espace normé	ذو تيم في فضاء نظيمي
Fonctionnelle linéaire	تابعية خطية
Formule d'inversion	دستور القلب
de Fourier	لفوريي
de Laplace	للابلاس
de Mellin	لميلين
Formule de Taylor	دستور تايلور
Formule de Frénet	دستور فريني
Forsythe	فورسايث
Fourier	فوريي
Fredholm	فريدولم
Frénet	فريني
Gelfand	غالفوند
Grassmann	غراسمان
Hahn	هان
Heaviside	هيفسايد
Hélice	حلزون
dans un espace de dimension infinie	في فضاء ذي بعد غير منته
dans R_3	في R_3
dans R_n	في R_n
Hilbert	هيلبرت
Hobson	هوبسن
Idéal	مثالي
Identité de Christoffel-Darboux	متطابقة كريستوفال ـ داربو
Inégalité	متراجحة
de Bessel	بيسل
de Hölder	هولد

de Young	يونغ
Intégrale	تكامل
de Fourier	فوريي
-, Formule d'inversion	-، دستور القلب
multiplicative	الضربي
de Poisson	بواسون
Isomorphisme	تشاكل
de l'algèbre	الجبر
Jordan	جوردان
Keldych	كلديش
Kolmogorov	كولموغوروف
Krein	كرين
Lagrange	لاغرانج
Laplace	لابلاس
Legendre	لوجاندر
Leibniz	ليبنتز
Lemme sur le parallélogramme	توطئة حول متوازي الاضلاع
Limite généralisée	النهاية المعممة
de Cesàro	لسيزارو
de Toeplitz	لتوبليتز
de Voronoi	لفورونوي
Lipschitz	ليبشيتز
Livchitz	ليفشيتز
Longueur	طول
Matrice jordanienne	مصفوفة جوردانية
réelle	حقيقية
Matrice de Wronski	مصفوفة ورونسكي
Membrane	غشاء
Monomorphisme	تماثل متباين
Morphisme	تماثل

de L'algèbre	جبر
Multiplication des opérateurs	ضرب المؤثرات
Neumann	نومان
Neumann Von	نومان فون
Newton	نيوتن
Norme	نظيم
d'un opérateur linéaire	مؤثر خطي
d'un vecteur	شعاع
Normes équivalentes	نظيمات متكافئة
Noyau	نواة
de Dirichlet	دير كليت
de Fejér	فيجير
- pour L'intégrale de Fourier	ـ لتكامل فوريي
de Fourier-Legendre	لفوريي ـ لوجاندر
de Poisson	بواسون
Opérateur	مؤثر
Compact	متراص
de Fredholm	فريدولم
inverse	مقلوب
Linéaire	خطي
- borné	ـ محدود
- Compact	ـ متراص
- Continu	ـ مستمر
résolvant	حال
- d'une équation linéaire	ـ لمعادلة خطية
de Volterra	فولترا
Orthogonalisation	معامدة
Orthogonalité	تعامد
Ostrovski	أوستروفسكي
Peano	بيانو
Perpendiculaire	عمودي
Picard	بيكار
Point(s)	نقطة (أو نقاط)

Fixe	ثابتة (أو صامدة)
Ordinaire	عادية
Singulier	شاذة
de Valiron	فاليرون
Polynômes	كثيرات حدود
d'Hermite	هيرميت
de Jacobi	جاكوبي
de Laguerre	لاغير
de Legendre	لوجاندر
de Tchébychev	تشيبتشاف
Presque-solution	حل تقريبا
Principe du point fixe	مبدأ النقطة الثابتة (أو الصامدة)
Problème	مسألة
des isopérimètres	المحيطات المتساوية
de Watson	واتسن
Produit	جداء
Cartésien	ديكارتي
de Convolution	تزويج
d'un opérateur par un nombre	مؤثر في عدد
Projection d'un vecteur sur un sous-espace	مسقط شعاع على فضاء جزئي
Rayon de courbure	نصف قطر الانحناء
Rayon vecteur	نصف قطر شعاع
Réseau Linéaire	شبكة خطية
Riesz F	ريس ف
Rodrigues	رودريغاس
Schmidt	شميت
Schwarts	شفارتز
Série	سلسلة
de Fourier	فوريي
de Fourier-Legendre	فوريي ـ لوجاندر
de Vecteurs	أشعة
Serret	سيري

Sobolev	سوبولاف
Solution	حل
de l'équation différentielle	المعادلة التفاضلية
générale	عام
particulière	خاص
Somme	مجموع
directe	مباشر
d'opérateurs	مؤثرات
Sous-algèbre	جبر جزئي
Sous-espace	فضاء جزئي
invariant	لا متغير
osculateur	ملاصق
propre	ذاتي
Spectre	طيف
d'un élément de l'algèbre	عنصر من جبر
d'un opérateur linéaire	موثر خطي
Symétrique	متناظر
Sphère osculatrice	سطح كرة ملاصق
Spirale de Wiener	لولب فينار
Stone	ستون
Suite(s)	متتالية (أو متتاليات)
convergente	متقاربة
en forme de delta	في شكل دلتا
Suite d'opérateurs	مؤثرات
convergente	متقاربة
Fortement convergente	متقاربة بقوة
Système orthonormé	جملة متعامدة ومتجانسة
Tait	تايت
Tangente	مماس
Théorème	نظرية
d'Arzelà	ارزيلا
de Banach	باناخ
de Banach-Steinhaus	باناخ ـ ستينهاوس

de Broudno	برودنو
de Carleman-Ostrovski	كارلمان ـ اوستروفسكي
de Carleson	كاعرلسون
de Fejér	فيجير
de Gelfand-Mazur	غالفوند ـ مازير
de Jackson	جاكسن
de Nikolski	نيكولسكي
de Pythagore	فيثاغورس
de Riesz	ريس
de Robinson	روبنسن
de Stone	ستون
de Toeplitz	توبليتز
de Weierstrass	فيرشتراس
Thomson	تومسن
Toeplitz	توبليتز
Torsion	التواء (ليْ)
Transformée	مُحولة
de Fourier	فوريي
de Laplace	لابلاس
Unité d'une algèbre	وحدة جبر
Valeur propre	قيمة ذاتية
généralisée	معممة
Van der Pol	فان دار بُول
Vecteur courbure	شعاع انحناء
Vecteur nul	شعاع منعدم
Vecteur propre	شعاع ذاتي
Vecteurs	أشعة
Volterra	فولتيرا
Voronoi	فورونوي
Watson	واتسن
Weierstrass	فيرشتراس
Weiner	فينار
Wronski	ورونسكي

المراجع

[1] م. س. برودسكي، التمثيل المثلثي والجورداني

[1] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.

[2] أ. ل. برودنو، الجمع المحدود لمتاليات المصفوفات.

[2] А. Л. Брудно, Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем. сб., т. 16, стр. 191-245, 1945.

[3] أ. م. غالفند، د. أ. رايكوف، ج. أ. شيلوف

الحلقات النظيمية التبديلية

[3] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.

[4] أ. تس. غوخبارغ، م. غ. كرين

مدخل في نظرية المؤثرات الخطية غير القرينة لنفسها

[4] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.

[5] أ. تس. غوخبارغ، م. غ. كرين، نظرية مؤثرات فولترا في الفضاءات الهيلبرتية وتطبيقاتها.

[5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967.

[6] س. ماندلبرويت،

صفوف التوابع شبه التحليلية.

[6] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, 1936.

[7] أ. س. مونين، أ. م. ياغلوم،

الهيدروديناميكا الاحصائية.

[7] А. С. Монин и А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967, т. 2, гл. 8.

[8] م. أ. نايمارك،

الحلقات النظيمية

[8] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, изд. 2-е, «Наука», 1968.

[9] أ. ب. ناتانسون، النظرية الإنشائية للتوابع.

[9] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949.

[10] ب. ب. بالامودوف، المؤثرات الخطية التفاضلية ذات المعاملات الثابتة.

[10] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967.

[11] أ. غ. بيتروفسكي،
دروس في المعادلات ذات المشتقات الجزئية

[11] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961 (3. изд.), гл. II, § 9; гл. III, § 28; гл. IV.

[12] غ. م. فيختنغولتس،
دروس في الحساب التفاضلي والتكاملي.

[12] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, 1949, гл. XIX, § 5.

[13] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.

[13] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», 1965.

[14] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.

[14] Г. Е. Шилов, Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, «Наука», 1969.

[15] ج. أ. شيلوف
التحليل الرياضي.

[15] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Специальный курс, Физматгиз, 1961; стр. 262.

[16] ج. أ. شيلوف، ب. ل. غوريفيتش
التكامل، القياس، المشتق.

[16] Г. Е. Шилов и Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, М., 1967 гл. 2.

[17] أ. م. ياغلوم،
الاحداث العشوائية ذات التزايدات المستقرة.

[17] А. М. Яглом, Случайные процессы со стационарными приращениями, Успехи мат. наук, 1952, т. 7, № 5.

[18] ر. اغنيو، تكافؤ طرق تقدير المتتاليات.

[18] R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation sequences, Proc. Amer. Math. Soc, t.3, S. 550 - 565, 1952

[19] ج. آلكسيتس، مسائل تقارب السلاسل المتعامدة.

[19] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series. Lnd [a.o], Pergamon Press, 1961

[20] س. باناخ، نظرية العمليات الخطية.

[20] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, N.Y.Chelsea publ. Co., 1955.

[21] ر. كوك، المصفوفات غير المنتهية وفضاءات المتتاليات.

[21] R. Cooke, Infinite matrice and sequence spaces. Lnd., Macmillan, 1950.

[22] ر. كورنت، د. هيلبرت، الطرق (المستخدمة) في الفيزياء الرياضية.

[22] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. 1, New York - London 1955.

[23] أ. غالفند، ج. شيلوف، التوزيعات.

[23] I. Guelfand, G. Chilov, Les distributions, Dunod, 1962 - 1976

[24] د. جاكسون، سلاسل فوريي وكثيرات الحدود المتعامدة.

[24] D. Jackson, Fourier series and orthogonal polynomials, 3rd. ed., Carus Mathematical Monographs, Oberlin (Ohio), 1948.

[25] ست. كازمارز، هـ. شتاينهوس، نظرية السلاسل المتعامدة.

[25] st. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie des orthogonalreihen, Warszawa - Lwow, 1935

[26] ف. سميرنوف، دروس في الرياضيات العالية، ج 3، القسم 2، الفصل 8. 1. 6 مطبعة جامعة دمشق (ترجمة)، 1973.

الفهرس

[20] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, N.Y. Chelsea publ. co., 1955.
[21] R. Cooke, Infinite matrice and sequence spaces. Lnd., Macmillan 1950.
[22] R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, vol. 1, New York-London 1955.
[23] I. Guelfand et G. Chilov, Les distributions, Dunod, 1962-1967.
[24] D. Jackson, Fourier series and orthogonal polynomials, 3rd. ed., Carus Mathematical Monographs, Oberlin (Ohio) 1948.
[25] St. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie des Orthogonalreihen, Warszawa-Lwow 1935.
[26] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, t. III, 2e partie, VI-1-8, Editions de Moscou 1972.

Bibliographie

[1] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1969.

[2] А. Л. Брудно, Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем. сб., т. 16, стр. 191-245, 1945.

[3] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, 1960.

[4] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.

[5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967.

[6] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, 1936.

[7] А. С. Монин и А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, «Наука», 1967, т. 2, гл. 8.

[8] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, изд. 2-е, «Наука», 1968.

[9] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.-Л., 1949.

[10] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967.

[11] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961 (3. изд.), гл. II, § 9; гл. III, § 28; гл. IV.

[12] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, 1949, гл. XIX, § 5.

[13] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», 1965.

[14] Г. Е. Шилов, Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, «Наука», 1969.

[15] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Специальный курс, Физматгиз, 1961; стр. 262.

[16] Г. Е. Шилов и Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, М., 1967 гл. 2.

[17] А. М. Яглом, Случайные процессы со стационарными приращениями, Успехи мат. наук, 1952, т. 7, № 5.

[18] R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation sequences, Proc. Amer. Math. Soc., t. 3, S. 550-565, 1952.

[19] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series. Lnd [a.o.), Pergamon Press, 1961.